అంకెలు, సంఖ్యలు: ప్రధాన సంఖ్యలు

వేమూరి వేంకటేశ్వరరావు

క్రీ. పూ. 500 నుండి 300 వరకు ఉన్న కాలం నాటికే, అంటే బుద్ధుడి కాలం నుండి అశోకుడి కాలం వరకు, పైథాగరోసు తత్సంబంధికులైన గ్రీకులకు అంకెలలో ఏదో మహత్తర శక్తి ఉందని గట్టి నమ్మకం ఒకటి ఉండేది. ఈ నమ్మకమే నేటికి 'న్యూమరాలజీ' రూపంలో మనకి కనిపిస్తోంది. అంకెలలో ఏదో శక్తి ఉందనే నమ్మకానికి కారణం కొన్ని అంకెలలో వారికి కనిపించిన వైపరీత్యమైన లక్షణాలు కావచ్చు.

ప్రధాన సంఖ్యలు. ఉదాహరణకి గ్రీకులకి ప్రధాన సంఖ్యల (ప్రైమ్ నంబర్స్) గురించి కొంత వరకు తెలుసు. ప్రధాన సంఖ్యలు అంటే ఏమిటి? ఏదైనా సంఖ్యని 1 చేత, తన చేత తప్ప మరే ఇతర సంఖ్య చేత నిశ్శేషంగా భాగించడానికి వీలు పడని పక్షంలో ఆ సంఖ్యని ప్రధాన సంఖ్య అంటారు. ఉదాహరణకి 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, మొదలైనవి ప్రధాన సంఖ్యలు.

ప్రాచీన కాలంలో ఈజిప్ట్ లోని అలెగ్జాండ్రియా నగరంలో జగద్విఖ్యాతి చెందిన బృహత్ గ్రంథాలయం ఒకటి ఉండేది. ఎరతోస్తినీస్ (క్రీ. పూ. 276 – 194) అనే గ్రీకు పెద్దమనిషి ఈ గ్రంథాలయానికి అధిపతిగా ఉండేవారు. క్రీస్తు శకం ఆరంభం కావడానికి ముందు కాలంలో నివసించిన మహా మేధావులలో ఈయనని ఒకరుగా లెక్కించడం అతిశయోక్తి కాబోదు. ఆ రోజులలోనే భూమి గుండ్రంగా ఉందని ఉద్ఘాటించడమే కాకుండా భూగోళం యొక్క వ్యాసార్థం ఎంతో అంచనా వేసి చెప్పేడాయన. ఈయన ప్రధాన సంఖ్యల మీద కూడ పరిశోధనలు చేసి 'ఎరతోస్తినీస్ జల్లెడ' అనే ఊహాత్మకమైన ఒక పరికరాన్ని మనకి వదలి పెట్టి వెళ్ళిపోయాడు. ఈ జల్లెడలో సంఖ్యలని వేసి 'జల్లిస్తే' ప్రధాన సంఖ్యలు పైన మిగులుతాయి; తక్కినవి కిందకి దిగజారిపోతాయి.

ఈ జల్లెడ ఎలా పనిచేస్తుందో చూద్దాం. ముందు సంఖ్యలన్నిటినీ కింద చూపిన విధంగా ఒక వరుసలో రాసుకోవాలి.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17....

ఈ వరుసలో 1 ఎల్లప్పుడూ ప్రధాన సంఖ్యే. ఇది మారదు కనుక దీనిని లంగరు అని దీని చుట్టూ వలయాకారంలో ఒక సున్న చుడదాం.

తర్వాత 2 చుట్టూ ఒక సున్న చుడదాం. ఇప్పుడు ఈ 2 తర్వాత నిర్విరామంగా వచ్చే సంఖ్యలలో ప్రతి రెండవ సంఖ్యనీ కొట్టేద్దాం. ఇప్పుడు పైన చూపిన వరుస ఇలా ఉంటుంది.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,...

ఇలా కొట్టేయగా మిగిలిన సంఖ్యలలో 2 తర్వాత వచ్చే మొదటి సంఖ్య చుట్టూ ఒక సున్న చుడదాం. అంటే 3 చుట్టూ ఒక గుండ్రటి గీత గీస్తామన్న మాట. ఇప్పుడు ఈ 3 తర్వాత నిర్విరామంగా వచ్చే సంఖ్యలలో ప్రతి మూడవ సంఖ్యనీ (గతంలో కొట్టేసిన సంఖ్యలని కూడ లెక్క పెడుతూ) కొట్టెద్దాం. గతంలో ఒకసారి కొట్టేసిన సంఖ్యలనే మళ్ళా కొట్టేయవలసి వస్తుంది. అయినా మరేమీ పరవా లేదు. ఇప్పుడు పైన చూపిన వరుస ఇలా ఉంటుంది.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,...

ఈ ప్రక్రియ ఇలా కొనసాగిస్తూ పోగా మిగిలిన సంఖ్యలన్నీ ప్రధాన సంఖ్యలు. ఈ జల్లెడకి ఉన్న లక్షణాలన్నీ సమగ్రంగా అధ్యయనం చెయ్యడానికి కావలసిన వ్యవధి మనకి ఇప్పుడు లేదు కనుక ముందుకి కదులుదాం.

క్రీ. పూ. 300 సంవత్సరంలో యూకిలిడ్ రేఖాగణిత సూత్రావళి ('ఎలిమెంట్స్ అఫ్ జియామెట్రీ') అనే పేరుతో జగద్విఖ్యాతమైన పుస్తకం ప్రచురించే నాటికే ప్రధాన సంఖ్యలకి సంబంధించిన సిద్ధాంతాలెన్నో ప్రమాణాత్మకంగా ప్రాచుర్యం పొంది ఉన్నాయి. ఉదాహరణకి ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతంగా ఉన్నాయని ఈ సూత్రావళి యొక్క నవమ స్కందంలో యూకిలిడ్ స్వయంగా ఋజువు చేసేరు. అంటే ప్రధాన సంఖ్యల జాబితాని తయారు చెయ్యడానికి ప్రయత్నం చేస్తే అది తెమిలే పని కాదు – హనుమంతుడి తోకలా – ప్రధాన సంఖ్యలు నిరంతరం అలా కనిపిస్తూనే ఉంటాయి. తరగని దంపులా, జల్లిస్తూన్న కొద్దీ – చేతులు నొప్పి పుట్టి ఆపేస్తే తప్ప – ప్రధాన సంఖ్యలు అలా కనిపిస్తూనే ఉంటాయి.

యూకిలిడ్ తన పుస్తకంలో మరొక విషయం ఋజువు చేసేరు. ఏ సంఖ్యనైనా సరే కొన్ని ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా ఒక ఏకైక పద్ధతిలో రాయవచ్చని ఆయన ఉద్ఘాటించేరు. మచ్చుకి: 2 = 2 ∗ 1 (ఇక్కడ గుణకారానికి గుర్తుగా నక్షత్రపు గుర్తు వాడుతున్నాను), 8 = 2 ∗ 2 ∗ 2. అలాగే 21 = 7 ∗ 3. ఏదో రెండు ఉదాహరణలు చూపించేను కనుక ఈ పద్ధతి ఎల్లప్పుడూ సజావుగా నడుస్తుందనుకోవడం తొందరపాటే అవుతుంది. ఉదాహరణకి 1001 = 7 ∗ 143 = 11 ∗ 91. ఇక్కడ ఆదిలోనే రెండు హంసపాదులు వచ్చేయి. మొదటి హంసపాదు. 1,001 ని ఏకైకంగా కాకుండా రెండు రకాలుగా రాయడం జరిగింది. రెండవ హంసపాదు ఏమిటంటే 143, 91 రెండూ పైపైకి ప్రధాన సంఖ్యలలా అనిపించినా నిజానికి అవి ప్రధాన సంఖ్యలు కావు. ఎందుకంటే 143 = 11 ∗ 13 అయితే 91 = 7 ∗ 13 అయింది. ఇప్పుడు 1001 యొక్క కారణాంకాలని ఈ విధంగా రాయవచ్చు.

1001 = 7 ∗ 143 = 7 ∗ 11 ∗ 13

1001 = 11 ∗ 91 = 11 ∗ 7 ∗ 13

గుణకారం ఏ క్రమంలో చేసినా వచ్చే లబ్ధం ఒకటే కనుక మన 'ఏకైక' సిద్ధాంతానికి భంగం రాలేదు. ఈ ఉదాహరణ చెప్పే నీతి ఏమిటంటే ప్రధాన సంఖ్యలతో చెంగనాలు వేస్తూన్నప్పుడూ, చెలగాటాలు ఆడుతూన్నప్పుడు కొంచెం ఒంటి మీద తెలివి అట్టేపెట్టుకుని మెలగాలి, లేకపోతే తప్పులు ఒప్పులాగా, ఒప్పులు తప్పులాగా కనిపించే ప్రమాదం ఉంది.

ప్రధాన సంఖ్యల యెడల అప్రమత్తత ఎంత ముఖ్యమో నొక్కి వక్కాణించడానికి మరొక ఉదాహరణ చూపిస్తాను.

ముందస్తుగా 1, 2 ప్రధాన సంఖ్యలే అని నిర్వచనం ద్వారా ఒప్పేసుకుందాం. ఇప్పుడు ఈ దిగువ చూపించిన శ్రేఢిని జాగ్రత్తగా పరిశీలించండి.

1 = 1 ఒక ప్రధాన సంఖ్య

1 * 1 + 1 = 2 ఒక ప్రధాన సంఖ్య

2 * 1 + 1 = 3 ఒక ప్రధాన సంఖ్య

2 * 3 + 1 = 7 ఒక ప్రధాన సంఖ్య

2 * 3 * 5 + 1 = 31 ఒక ప్రధాన సంఖ్య

2 * 3 * 5 * 7 + 1 = 211 ఒక ప్రధాన సంఖ్య

2 * 3 * 5 * 7 * 11 + 1 = 2,311 ఒక ప్రధాన సంఖ్య

ఈ ఆరు సందర్భాలలోనూ మనం చూసినది ఏమిటి? ఒకటి తర్వాత వరుసగా వచ్చే ప్రధాన సంఖ్యలని తీసుకుని, వాటిని క్రమానుసారంగా గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాలకి 1 కలిపితే వచ్చే మొత్తం మరొక ప్రధాన సంఖ్యగా భాసిల్లింది. ఒక సారి కాదు, రెండు సార్లు కాదు, వరుసగా ఆరు సార్లు ఈ నియమానికి ఉల్లంఘన రాలేదు. కనుక ఈ నియమాన్ని ఇక సర్వకాల సర్వావస్థలలోనూ పనిచేసే సిద్ధాంతపు స్థాయికి లేవనెత్తాలని మనకి ఉబలాటం ఉంటుంది. ఆ సదుద్దేశంతో, తర్వాత అంచెకి వెళ్ళి 2 * 3 * 5 * 7 * 11 * 13 + 1 = 30,031 ఒక ప్రధాన సంఖ్య అని మనం ఉద్ఘాటించడానికి ప్రయత్నం చెయ్యవచ్చు – అవతలి వాడు మనకంటె తెలివైనవాడు కానంత సేపూ. అవతలి వాడికి కొంచెం లెక్కలు గాని వచ్చుంటే వాడు బుర్రలో నాలుగు గుణింతాలు వల్లె వేసుకుని, అరెరె, 30,031 కి 59 న్నీ 509 న్నీ కారణాంకాలు కదా అని అనొచ్చు. కనుక 59 ని 509 చేత గుణించగా 30,031 వస్తుందని నిర్ధారణ చేసుకోగానే 30,031 ప్రధాన సంఖ్య కాదని ఒప్పుకోక తప్పదు. మన నియమానికి ఉల్లంఘన జరిగిపోయింది.

యూరప్‌లో పునరుజ్జీవనం ('రెనసాన్స్') ఐదు వందల ఏళ్ళ కిందటే ప్రారంభం అయింది. ఈ పునరుజ్జీవనానికి ఆరంభ దశలో (1588–1648) మరీన్ మెర్సెన్ అనే క్రైస్తవ ఫాదరీ ఒకాయన ఉండేవాడు. ప్రభువుకి చెయ్యవలసిన కైంకర్యాలన్నీ జరిపిన తర్వాత తీరుబడి సమయాలలో ఈయన అంకెలతో ఆడుకునేవాడు. ఈ ఆటలలో ఒక శుభ ముహూర్తంలో ఒక చిరు విషయం కనిపెట్టేడు. అదేమిటంటే 2 ని 'ఎన్నోకొన్ని' సార్లు వేసి గుణించగా వచ్చిన లబ్ధం లోంచి 1 ని తీసివెయ్యగా మిగిలిన శేషం ప్రధాన సంఖ్య అవుతుంది, అని. దీన్నే గణిత పరిభాషలో (2 ** న – 1) = ప్రధాన సంఖ్య అని రాయవచ్చు. ఇక్కడ రెండు నక్షత్రాలు ఘాతానికి సంకేతంగా నిలుస్తున్నాయి. అంటే, 2 ** న లో న = 1 అయితే '2 ని ఒక సారి వేసి గుణించు' అని అర్థం, న = 3 అయితే '2 ని మూడు సార్లు వేసి గుణించు' అని అర్థం. మెర్సెన్ ఫాదరీ గారు అన్నదేమిటంటే న = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257 అయినప్పుడు మాత్రమే ఈ సూత్రం పని చేస్తుందనిన్నీ 'న' విలువ 257 దాటిన సందర్భాలలో ఏమవుతుందో తనకి తెలియదనిన్నీ అన్నారు. ఋజువేమీ ఇవ్వలేదు. (మన రామానుజన్ కూడ ఇలాగే ఉట్టంకింపులు ఎన్నో చేసేరు.) దరిమిలా 1876 లో లూకస్ అనే ఆయన (2 ** 127 – 1) నిజంగానే ప్రధాన

సంఖ్య అయిందని ఋజువు చేసేరు. అప్పటి నుండి మెర్సెన్ గౌరవార్థం (2 ** న − 1) లాంటి సంఖ్యలన్నిటికి గుత్తగుచ్చి మెర్సెన్ సంఖ్యలు అని నామకరణం చేసేసేరు. రాత సౌలభ్యం కొరకు పైన ఉదహరించిన సంఖ్యని 'మ−127' అని రాయడం మొదలు పెట్టేరు; ఇక్కడ 'మ' మెర్సెన్ స్మారకానికి చిహ్నం.

జరగవలసిన పురస్కారాలు జరిగిపోయిన తర్వాత, క్రమేపీ మెర్సెన్ ఖ్యాతికి బీటలు పడడం మొదలైంది. ఉదాహరణకి (2 ** న − 1) ప్రధాన సంఖ్య అవాలంటే ఘాతంలో ఉన్న 'న' ప్రధాన సంఖ్య అయితీరాలని తెలిసింది. అంతే కాకుండా ఘాతంలో ఉన్న 'న' ప్రధాన సంఖ్య అయినప్పుడల్లా (2 ** న − 1) ప్రధాన సంఖ్య కానక్కర లేదని తేలగొట్టేరు.

ఏమైతేనేమి మెర్సెన్ గారి పేరు చిరస్థాయిగా నిలచిపోయింది. వ్రతం చెడ్డా ఫలం దక్కడం అంటే ఇదే. 1952 నాటికి కంప్యూటర్ల సహాయంతో మ−521, మ−607, మ−1279, మ−2203, మరియు మ−2281 ప్రధాన సంఖ్యలే అని ఋజువయిపోయింది. 1999 లో మ−3021377 కూడ ప్రధాన సంఖ్య అని ఋజువయింది. ఈ మ−3021377 లో 909526 అంకెలున్నాయిట. ఈ మ−3021377 అనేది 37వ మెర్సెన్ ప్రధాన సంఖ్య!

పరిపూర్ణ సంఖ్యలు. గ్రీకులకి పరిపూర్ణ సంఖ్యలు ('పెర్‌ఫెక్ట్ నంబర్స్') అన్నా, కలుపుగోలు సంఖ్యలు ('ఏమికబుల్ నంబర్స్') అన్నా వల్లమానిన అభిమానం. ఉదాహరణకి 6 ని తీసుకుందాం. దీనిని 1 చేత, 2 చేత, 3 చేత పరిపూర్ణంగా భాగించవచ్చు. అంటే శేషం లేకుండా భాగించడం. కనుక 1 ని, 2 ని, 3 ని 6 యొక్క క్రమ విభాజకాలు ('ప్రోపర్ డివైజర్స్') అంటారు. ఇప్పుడు ఈ క్రమ విభాజకాలని కూడితే 1 + 2 + 3 పెరసి మన 6 మళ్ళా వచ్చేసింది.

మరొక ఉదాహరణ. 28 యొక్క క్రమ విభాజకాలు 1, 2, 4, 7 అని ఎవరికి వారే ఋజువు చేసుకొండి. ఈ 1, 2, 4, 7 లని కలపగా మళ్ళా 28 వచ్చేసింది. ఈ లక్షణం ఉన్న సంఖ్యలన్నిటినీ పరిపూర్ణ సంఖ్యలు అంటారు. ఇప్పటివరకు మనకి తెలుసున్న పరిపూర్ణ సంఖ్యలన్నీ కూడ సరి సంఖ్యలే అవడం గమనించదగ్గ విషయం.

ఈ పరిపూర్ణ సంఖ్యల గురించి మనకి తెలియని విషయాలు ఇంకా ఎన్నో ఉన్నాయి. పరిపూర్ణ సంఖ్యలు సాంతమా? అనంతమా? పరిపూర్ణ సంఖ్య అయిన బేసి సంఖ్య ఉందా? ఒక పరిపూర్ణ సంఖ్య సరి సంఖ్య అయినప్పుడు మాత్రం దాని స్వరూపం ఏమిటో మనకి తెలుసు. తెలియనివి చాలా ఉన్నాయి.

అపురూప (యూనిటరీ) పరిపూర్ణ సంఖ్యలు. పరిపూర్ణ సంఖ్యల గురించిన చర్చ పూర్తి చేసే లోగా అపురూప (యూనిటరీ) పరిపూర్ణ సంఖ్యలు గురించి కొద్దిగా పరిశీలిద్దాం. ఉదాహరణకి 60 ని తీసుకుందాం. దీనిని 4 చేత భాగిస్తే 15 వచ్చింది కదా. కనుక ఈ (4, 15) జంటని 60 యొక్క భాజకాలు అంటారు. ఇలాగే (3, 20), (12, 5), (1, 60) కూడ 60 యొక్క భాజకాల జంటలే. ఈ భాజకాలన్నిటిని వరసగా రాసి కూడితే 1 + 3 + 4 + 5 + 12 + 15 + 20 + 60 = 120. ఇది మన 60 కి సరిగ్గా రెండింతలు ఉంది కదా. ఈ లక్షణం ఉన్న పరిపూర్ణ సంఖ్యలని అపురూప (యూనిటరీ) పరిపూర్ణ సంఖ్యలు అంటారు. ఇప్పటి వరకు మనకి తెలుసున్న అపురూప పరిపూర్ణ సంఖ్యలు అచ్చం అయిదు. అవి − 6, 60, 90, 87360, 146 361 946 186 458 562 560 000. ఈ అపురూప పరిపూర్ణ సంఖ్యలని కనుక్కున్న ఘనత మన తెలుగు వాడైన ప్రొఫెసర్ ముతుకుమల్లి వెంకట సుబ్బారావు గారిది.

ఫర్మా సంఖ్యలు. ఇప్పుడు 2**(2**న) + 1 అనే సంఖ్యని తీసుకుందాం. ఇక్కడ రెండు నక్షత్రాలు ఘాతాన్ని సూచిస్తుంది. ఉదాహరణకి (2**న) లో న = 1 అయినప్పుడు, ''రెండుని ఒకసారి వేసి గుణించమనది

అని అర్థం. కనుక 2**1 = 2. ఇప్పుడు 2**(2**1) +1 = 2**2 + 1 = 5. దీనిని ఒకటవ ఫర్మా సంఖ్య అంటారు. ఇదే విధంగా న = 2 అయినప్పుడు మనకి లభ్యమయేది రెండవ ఫర్మా సంఖ్య. ఇదే విధంగా న = 0 అయినప్పుడు మనకి లభ్యమయేది పూజ్య ఫర్మా సంఖ్య. ఈ ఫర్మా సంఖ్యలకి ఫ–0, ఫ–1, ఫ–2,... అని పేర్లు పెట్టి వరసగా రాస్తే అవి 3, 5, 17,....మొదలగునవి. ఈ మొదటి మూడూ ఫర్మా సంఖ్యలూ ప్రథాన సంఖ్యలేనని చూడగానే తెలుస్తోంది. మిగిలినవాటి మాట? ఫ–0, ఫ–1, ఫ–2, ఫ–3, ఫ–4 ప్రథాన సంఖ్యలే అని రూఢి అయిపోయింది. ఫ–5 లగాయతు ఫ–16 వరకూ ప్రథాన సంఖ్యలు కావు అని ఋజువైపోయింది. ఫ–17 ప్రథాన సంఖ్య అవునో కాదో ఇంత వరకు తేలలేదు. ఈ ఫ–17 ని పూర్తిగా రాస్తే ఆ సంఖ్యలో పదకొండు వేలకి పైగా అంకెలు ఉంటాయి.

కలుపుగోలు సంఖ్యలు. ఇప్పుడు 220 ని 284 ని తీసుకుందాం. ఈ 220 యొక్క క్రమ విభాజకాలు తీసుకుని వాటిని కూడితే 284 వస్తుంది. కాగా, 284 క్రమ విభాజకాలని తీసుకుని వాటిని కలిపితే 220 వస్తుంది. నా మాట మీద నమ్మకం లేకపోతే చదువరులు ఎవరికి వారే పలక, బలపం తీసుకునో, కాగితం కలం తీసుకునో ఋజువు చేసుకోవచ్చు. ఈ రకం సంబంధం ఉన్న సంఖ్యలని గ్రీకులు పరస్పర మైత్రీభావం ఉన్న, లేదా కలుపుగోలు సంఖ్యలు అన్నారు.

ఇలా గ్రీకులు దరిదాపు నాలుగు శతాబ్దాల చిల్లర కాలం సంఖ్యలతో గారడీలు చేసేరు. తర్వాత ఏమి జరిగిందో కాని రెండు సహస్రాబ్దాల పాటు ఏమీ జరగలేదు. ఈ రెండువేల ఏళ్ళనీ అంధకార యుగంగా పరిగణించవచ్చు. మన దేశంలో కూడ ఇలాగే అంధకార యుగం శతాబ్దాలపాటు రాజ్యం ఏలేసింది. ప్రాచ్యులు, పాశ్చాత్యులు అన్న విచక్షణ లేకుండా ఏలినాటి శని అందరినీ పట్టుకుని పీక్కు తింటాడన్న మాట. ఇప్పుడిప్పుడే మనం ఈ తిమిరంలోంచి లేచి కళ్ళు నులుపుకుంటూ, ఒళ్ళు విరుచుకుంటూ బయటకి రావడమా మానడమా అనుకుంటూ, ఆవలిస్తూ ఆలోచిస్తున్నాం.

ఈ కథనం ఇలా ఉండగా స్విట్జర్లాండు కి చెందిన మహా మేధావి ఆయిలర్ (క్రీ. శ. 1707–1783) కనీసం 60 కలుపుగోలు సంఖ్యల జంటలని కనుక్కున్నారు.