అంకెలని సంఖ్యలని రాసే పద్ధతులు
వేమూరి వేంకటేశ్వరరావు

అంకెలకి సంఖ్యలకి భాషతో ఉన్న సంబంధానికే ఇంతవరకు ప్రాధాన్యత ఇచ్చేం. కాని అంకెల కథ ఇంకా చాలా ఉంది.

ఉదాహరణకి అంకెలని రాయటం లో ఉన్న తేడాలని ఒక సారి పరిశీలిద్దాం. ఇప్పుడంటే అంకెలని రాయటంలో ఒక ఒరవడి స్థిరపడిపోయింది కానీ మొదట్లో ఇది అంత సులభ సాధ్యంగా ఉండేది కాదు.

అనాదికాలంలో, అంటే క్రీస్తు పూర్వం 3000 సంవత్సరాలకి ముందే, మట్టి పలకల మీద ఘంటపుచీల (wedge) తో రాసిన అంకెలు సుమేరియాలో దొరికేయి. ఘంటపుచీలని లేటిన్ భాషలో ``క్యునియస్`` అంటారు కనుక ఈ రకపు రాతని ``క్యూనిఫారం`` రాత అంటారు. ఈ క్యూనిఫారం పద్ధతి నెమ్మదిగా బాబిలోనియా కి పాకిరింది. క్రీస్తు పూర్వం 1500 సంవత్సరపు కాలానికి, అంటే హామురాబీ రాజ్యం ఏలే రోజులకి, ఈ పద్ధతి బాగా చెలామణీలోకి వచ్చిన దాఖలాలు ఉన్నాయి. ఘంటపుచీల చివర "పక్కకి తిప్పి పడుక్కోబెట్టిన హంసపాదు ఆకారంలో" ఒక ముద్రని తయారు చేసి, ఆ ముద్రతో మట్టి పలకలమీద అద్దకం అద్దినట్లు అద్దేవారుట. ఆ ముద్ర 10 అంకెకి గుర్తుట. రెండు హంసపాదు ముద్రలు ఇరవై తో సమానం. నాలుగు హంసపాదు ముద్రల తర్వాత రెండు నిలువు గీతలు గీస్తే అది నలభైరెండు తో సమానంట.

ఈ కథనాన్ని బట్టి బాబిలోనియా వారికి స్థాన బలం సూత్రం తెలిసినట్లే అనిపిస్తోంది కదా. కాని వీళ్ళకి సున్న రాయటం ఎలాగో తెలియలేదు. తమాషా ఏమిటంటే వీరి తరువాత వచ్చిన యవనులు (గ్రీకులు), రోమకులు (రోమనులు) ఈ స్థాన బలం అనే కిటుకుని అవగాహన చేసుకున్నట్లు లేదు. ``మూడడుగులు ముందుకేస్తే ఆరడుగులు వెనక్కి వేస్తాం" అన్న సినిమా పాటలా, వీరిరువురు కొంచెం తిరోగమనం చేసి మరొక కొత్త పద్ధతిలో లెక్కించటం మొదలుపెట్టేరు.

యవనులు చేసినది ఏమిటంటే, వాళ్ళ భాషలో ఉన్న అక్షరాలనే అంకెలుగా కూడ వాడటం మొదలు పెట్టేరు. `అ` అంటే 1, `ఆ` అంటే 2, `ఇ` అంటే 3, `ఈ` అంటే 4... అలా వెళుతుందీ పద్ధతి. గ్రీకు భాషలో `అ, ఆ` లు అనడానికి బదులు, వాళ్ళ భాషలో ఆల్ఫా, బీటా, గామ్మా, … అంటారు కనుక `ఆల్ఫా` అంటే 1, `బీటా` అంటే 2, `గామా` అంటే 3, `డెల్టా` అంటే 4, `ఎప్సిలాన్` అంటే 5, `ఈటా` అంటే 8, `తీటా` అంటే 9, `అయోటా` అంటే 10, `కప్పా` అంటే 20... అలా ... అలా, వెళుతుంది వీరి పద్ధతి.

పాత గడియారాలు చూచిన వారికి రోమక పద్ధతి కొట్టిన పిండే. పుస్తకాలలోని పీఠికలలోని పేజీల్లోను, పురాతన భవనాల మీద కూడ రోమక పద్ధతి అంకెలు కనబడుతూనే ఉంటాయి. ఈ పద్ధతిలో 1, 5, 10 లకి I, V, X వాడటం అందరికీ సుపరిచితమే. తరవాత 50 కి L, 100 కి C, 500 కి D, 1000 కి M వాడతారు. ఇక్కడ C అన్నది `సెంటమ్` అన్న లేటిన్ మాటకి, M అన్నది `మిల్లి` అన్న మాటకి మొదటి అక్షరాలు.

ఈ పురాతన గాధలు అన్నీ ఎందుకులెండి. ఈ రోజులలో మనం వాడే 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 అనే పది అంకెలని మన దేశంలో అయితే ఇంగ్లీషు అంకెలనీ, పాశ్చాత్య దేశాలలో అయితే `అరబ్బు` అంకెలని అంటారు గాని, నిజానికి ఇవి హిందూ అంకెలు. ఏ కారణం వల్లనో మనం మాత్రం మన పంచాంగాలలోను తదితర పవిత్ర స్థలాలలోను ఈ హిందూ అంకెలని వాడటానికి ఇష్ట పడం; `తెలుగు` అంకెలు వాడతాం - అక్కడికి ఈ `అరబ్బు` అంకెలు అపవిత్రము, తెలుగు అంకెలు పవిత్రము అయినట్లు.

గమనించేరో లేదో, హిందూ అంకెలలో మొదటి అంకె సున్న, లేదా సూన్యం. ఈ సున్న అనే భావం మనం మన దేశంలోనే కనిపెట్టేమని నేను కొప్పెక్కి కూయక్కర లేదు. ఇది మన దేశపు సొంత మాట. పరాయి దేశాలలో, ముఖ్యంగా పాశ్చాత్య దేశాలలో, ఈ భావానికి సరిపడే మాట అప్పట్లో లేదు. తెలుగులో సాంకేతిక పదాలు లేక మనం ఇప్పుడు ఎలా తంటాలు పడుతున్నామో అలాగే పాశ్చాత్యులకి కూడ ఇబ్బంది వచ్చి ఉండుంటుంది. అందుకని వారు మన `సూన్య` ని తీసుకుని `సిఫిర్` గాను తదుపరి ఈ సిఫిర్ ని `సైఫర్` (cipher) గాను మార్చి వాళ్ళ భాషలో వాడేసుకోవటం మొదలు పెట్టేరండీ. ఇదే సైఫర్ మరో అడ్డు దారి వెంబడి వెళ్ళి `జెఫిరో` గాను, ఆ జెఫిరో కాస్తా `జీరో` (zero) గాను అయేయండీ.

ఒక్క సున్నని ఒక్కటీ కనిపెట్టి ఊరుకుని ఉంటే మన వాళ్ళకి ఇంత పేరు వచ్చేసి ఉండేది కాదేమో. సున్నతో పాటు స్థాన బలం సూత్రం అని మరొకటి కనిపెట్టి పారేసేరు మనవాళ్ళు. అప్పటి నుంచే ఒకట్ల స్థానం, పదుల స్థానం, వందల స్థానం, అనుకుంటూ అలా ఎంతవరకునైనా లెక్క పెట్టుకుంటూ వెళ్ళగలిగే స్థోమత మనకి వచ్చింది.

ఇప్పటి వరకు చెప్పిన ముఖ్యమైన అంశాలని ఒక సారి పునర్దర్శనం చేసుకుందాం. హిందువులు అంకెలకి కొంత సహజ బలం, కొంత స్థాన బలం ఉంటాయని అన్నారు. ఒక అంకె ఏ స్థానాన్నైనా ఆక్రమించవచ్చు. ప్రతీ స్థానానికి కొంత స్థాన బలం ఉంటుంది. ఈ స్థాన బలం కుడి నుండి ఎడమకు పదేసి ఇంతలు చొప్పున పెరుగుతు వెళ్ళిన యెడల దానిని `దశాంశ పద్ధతి` అంటారు. ఒక సంఖ్య యొక్క నిజమైన విలువ కనుక్కోవాలంటే ప్రతి స్థానంలోను ఉన్న అంకెని ఆ అంకె ఉన్న స్థాన బలంతో గుణించి, ఆయా లబ్ధాలని కలపాలి. దశాంశ పద్ధతిలో ప్రతి స్థానం లోను పది వివిధమైన గుర్తులు గల అంకెలని వాడ వచ్చు.

దశాంశ పద్ధతి మనకి బాగా అలవాటు అయిన పద్ధతి కనుక నేను పైన క్రోడీకరించిన సంగ్రహం కొంచెం కృతకంగా కనిపించవచ్చు. కాని లెక్కించేటప్పుడు 0 నుండి 9 దాకా ఉన్న పది చిహ్నాలనే వాడి లెక్క పెట్టాలని ఎవరన్నారు? మన రెండు చేతులకి కలిపి పది వేళ్ళు ఉండబట్టి, మనం లెక్క పెట్టడానికి వేళ్ళు వాడతాము కాబట్టి, ఈ పదికి కొంత ప్రత్యేకత వచ్చి వుండవచ్చని విశ్వవ్యాప్తంగా ఉన్న అభిప్రాయం.

కాల గమనాన్ని కొలిచేటప్పుడు మనం దశాంశ పద్ధతిని వాడనేవాడం. చూడండి, అరవై సెకండ్లు ఒక నిముషం. అరవై నిముషాలు ఒక గంట. మొన్న మొన్నటి వరకు మూడు దమ్మిడీలు ఒక కాని, నాలుగు కానీలు ఒక అణా, నాలుగు అణాలు ఒక పావులా, నాలుగు పావులాలు ఒక రూపాయ. కనుక దశాంశ పద్ధతిలోనే లెక్క పెట్టాలని ఎవరూ శాశించ లేదు.

ఉదాహరణకి, అష్టాంశ పద్ధతిలో ఎనిమిదే ఎనిమిది అంకెలు ఉంటాయి. అవి, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. ఈ పద్ధతిలో ఈ

ఎనిమిది అంకెల తోటే లెక్కలన్నీ చేస్తాం. ఈ పద్ధతిలో 7 తరువాత ఏమిటి వస్తుంది? ఉన్న అంకెలన్నిటిని ఒక సారి లెక్క పెట్టడం అయిపోయింది కనుక, ఆ విషయం గుర్తు చేసుకుంటూ 1 వేసి, దాని తరువాత 0, 1, 2, అనుకుంటూ మళ్ళా 7 వరకు లెక్క పెడతాం. కనుక, అష్టాంశలో 7 తరువాత 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 ఆ తరువాత 20, 21, ... వస్తాయి. ఇక్కడ వచ్చే 10 ని `పది` అనకూడదు. పది అనేది దశాంశ పద్ధతిలో వచ్చే మాట. అష్టాంశలో వచ్చే 10 దశాంశలో వచ్చే ఎనిమిదితో సమానం. అలాగే అష్టాంశలో వచ్చే 11 ని `పదకొండు` అనకూడదు; ఇది దశాంశలో వచ్చే తొమ్మిదితో సమానం. కనుక 10 అనే సంఖ్య కనిపించినప్పడు అది "ఆటోమేటిక్" గా "పది" అయిపోదు కనుక ఆ సందర్భం అర్థం అయేవరకు దానిని "ఒకటీ సున్న" అనడమే మంచిది.

ఇదే విధంగా ద్వియాంశ పద్ధతిని నిర్వచించవచ్చు. ద్వియాంశ పద్ధతిలో రెండే రెండు అంకెలు ఉన్నాయి. అవి - 0, 1. ఉన్న రెండు అంకెలని ఒక సారి లెక్క పెట్టడం అయిపోయింది కనుక ఒక ఒకటి వేసి మళ్ళా లెక్క పెట్టాలి. కనుక 0, 1 తరువాత వచ్చేవి 10, 11. దశాంశ పద్ధతిలో 99 ఎలాంటిదో, ద్వియాంశలో 11 అలాంటిది. కనుక ద్వియాంశలో 11 తరువాత వచ్చే సంఖ్య 100 (ఇది 'నూరు" కాదు, 'వంద' కాదు. దీని పేరు ఒకటీ సున్నా సున్న.") ఈ పద్ధతిలోనే కంప్యూటర్లు లెక్కపెడతాయని ఈ రోజులలో సర్వులకు తెలిసిన విషయమే.

అంకెలలో రకాలు

అంకెలలో రకరకాల అంకెలు ఉన్నాయి, మనుష్యులలో రకరకాల మనుష్యులు ఉన్నట్లే. ఈ రకాలని ఇప్పుడు కొంచెం పరిశీలిద్దాం.

1, 2, 3, వగైరాలని పూర్ణ సంఖ్యలు (integers) అంటారు. వీటినే సహజ సంఖ్యలు (natural numbers) అని కూడా అంటారు. పూర్ణ సంఖ్యల చరిత్ర మానవుడి చరిత్ర కంటె పురాతనమైనదని కొందరి నమ్మకం. పక్షులు గూటిలో పెట్టిన గుడ్లలోంచి ఒకటో, రెండో గుడ్లు మనం తీసేస్తే కొన్ని గుడ్లు లోపించాయనే విషయం తల్లి పక్షి గ్రహించగలదని ప్రయోగాత్మకంగా నిరూపించేరు. కనుక లెక్కపెట్టగలగటం అనే పని ఒక్క మానవుడే కాదు, తదితర జీవులు కూడా చెయ్యగలవన్న మాట.

మానవులకి మృగాలకి తేడా ఏమిటంటే, మానవుడు లెక్కించేటప్పుడు భాష వాడతాడు. కాని మనిషి లెక్కించేటప్పుడు వాడే భాషకి, దాని వనక ఉన్న భావానికి మధ్య ఉండే లంకె తెగడానికి కొంత కాలం పట్టింది. ఈ లంకె ఏమిటో సోదాహరణంగా వివరిస్తాను, కొంచెం ఓపిక పట్టండి.

ఫీజీ ద్వీప వాసులు పది పడవల్ని `బోలో` అంటారు, కాని పది కొబ్బరి కాయలని `కోరో` అంటారు. అంటే వారి భాషలో `పది` అనే భావానికి మాట లేదు. మన భాషలలో కూడ వెతికితే ఈ రకం మాటలు దొరుకుతాయి. ఉదాహరణకి ఇంగ్లీషు భాషలో సెంచరి (century) అనే మాట ఉంది. ఈ మాటకి ``నూరు పరుగులు`` అని క్రికెట్ పిచ్చి ఉన్న ఇండియాలో ఎవరిని అడిగినా చెబుతారు. ఇదే మాట అమెరికాలో వంద సంవత్సరాలని సూచిస్తుంది. అలాగే `కపుల్` (couple) అంటే `జంట`. తెలుగులో `ఫుంజీ` అంటే నాలుగు. ఇంకా కచ్చితంగా చెప్పాలంటే `నాలుగు చింత పిక్కలు`. ఈ రకం భావంతో లంకె పడ్డ మాటలు ఇంకా చాలా ఉన్నాయి - అన్ని భాషలలోను.

పూర్ణ సంఖ్యల తరువాత మనకి తరచుగా తారసపడేవి భిన్న సంఖ్యలు. వీటిని ఇంగ్లీషులో `ఫ్రేక్షన్`లు అంటారు. తెలుగులో కాని, సంస్కృతంలో కాని `భిన్నం` అంటే మామూలుగా కాకుండా మరొక విధంగా ఉండటం; ఇక్కడ `భాగం` అనే సూచనే లేదు. కాని ఇంగ్లీషులో మాత్రం `ఫ్రేక్షన్` అంటే భాగం అనే అర్థం. కనుక భిన్నాలకి `నిష్ప సంఖ్యలు` అనే కొత్త పేరు పెడుతున్నాను. `నిష్ప సంఖ్యలు` అంటే లవము, హారము ఉండి నిష్పత్తి ని తెలియజేసేవి.

భిన్నాలు ఎవరు ఎప్పుడు కనుక్కున్నారో ఎవ్వరికీ తెలియదు. కాని `భిన్నం` అనే భావం మానవుడి పుర్రెలో పుట్టినదే. క్రీస్తు పూర్వం 1650 ప్రాంతాలదైన `రిండ్ పపైరస్' (Rhind papyrus) లో 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 వంటి ఏకలవ భిన్నాలకి (అంటే లవంలో 1 ఉన్న భిన్నాలు), 2/3 కి ప్రత్యేకమైన మాటలు కనిపిస్తాయి. మన తెలుగులో కూడ చూడండి, 1/2 ని అర అనీ, 1/4 ని పావు అనీ అంటాం. మూడు పావులు అని చెప్పాలంటే సంధి చేసి ముప్పావు అంటాం. తెలుగులో, నాకు తెలుసున్నంత వరకు, 2/3 కి గానీ, తదితర భిన్నాలకి గాని ప్రత్యేకమైన పేర్లు ఉన్నట్లు లేదు. ముప్పేట అంటే 3/4 అనే అర్థం వస్తుంది, కాని ఈ మాట కొబ్బరి కాయ ఎంత ముదిరిందో చెప్పడానికే వాడటం చూసేను.

పూర్ణ సంఖ్యలు, భిన్న సంఖ్యలు తరువాత వచ్చే భావాలు మన అనుభవ పరిధికి కొంచెం అతీతంగా ఉంటాయి. ఉదాహరణకి కొన్ని సంఖ్యలని ఇంగ్లీషులో `ఇర్రేషనల్` (irrational) సంఖ్యలు అంటారు. `రేషనల్` కానివి `ఇర్రేషనల్`. ఇక్కడ ఈ `రేషనల్` అన్న మాట `రేష్యో` (ratio) అన్న మాటకి సంబంధించినది. ఒక నిష్పత్తి రూపంలో రాయగలిగే సంఖ్యలు నిష్ప సంఖ్యలు (rational numbers). మనం ఒక సంఖ్యని నిష్పత్తి రూపంలో రాయలేని పక్షంలో ఆ సంఖ్య అనిష్ప సంఖ్య (irrational number). పూర్ణ సంఖ్యలు కానివి, నిష్ప సంఖ్యలు కానివి అయిన సంఖ్యలు ఉన్నాయనే విషయం యవనులకి అవగతం అయేసరికి వారి ఆశ్చర్యానికి అంతు లేదు.

ఒక చతురస్రం లో కర్ణం యొక్క పొడుగుని లెక్క కట్టాలంటే భుజం పొడుగుని ఏ నిష్ప సంఖ్యతో గుణించినా సరి అయిన సమాధానం రాదని పైథోగరోస్ కనుక్కున్నాడు. ఇదే విషయం మరొక విధంగా చెపుతా. ఒక చతురస్రం లో కర్ణం పొడుగుకి, భుజం పొడుగుకి మధ్య ఉండే నిష్పత్తిని పూర్ణ సంఖ్యలతో వ్యక్త పరచ లేము. మన చతురస్రం యొక్క భుజం పొడుగు ఒక అంగుళం అనుకుంటే, కర్ణం పొడుగు ు2 (అంటే 2 యొక్క వర్గమూలం) అంగుళాలు. కనుక ు2 అనిష్ప సంఖ్యకి ఒక ఉదాహరణ. పైథోగరోస్ కి అనిష్ప సంఖ్యకి మధ్య ఉన్న బాదరాయణ సంబంధాన్ని పురస్కరించుకుని ు2 కి పైథోగరోస్ సంఖ్య అని పేరు పెట్టేరు.

అనిష్ప సంఖ్యలు ఉన్నాయనే విషయం మొట్టమొదట పైథోగరోస్ మనోవీధిలోనే మెరిసి ఉండుంటుందని కొందరి సిద్ధాంతం. ఇది నిజమో కాదో ఇతమిద్ధంగా మనకే కాదు, ఎవ్వరికీ తెలియదు. ఎందుకంటే బాబిలోనియా లోని మట్టి పలకల మీద చూపిన ఒక లెక్కలో ు2 యొక్క విలువ 14 దశాంశ స్థానాల వరకు తప్పు లేకుండా కట్టబడి ఉంది. కాని పైథోగరోస్ శిష్యులు తమ కూటమే ఈ ఘన విజయం మొట్టమొదటగా సాధించిందన్న అపోహతో శత వృషభ శిరచ్ఛేద యాగం చేసేరని ఒక ఐతిహ్యం ఉంది.

ఒకొక్క బాహువు పొడుగు ఒకొక్క అంగుళం చొప్పన ఉన్న (సమబాహు) చతురస్రం యొక్క కర్ణం ు2 అయినట్లే, ఒకొక్క బాహువు పొడుగు ఒకొక్క అంగుళమ చొప్పన ఉన్న (సమబాహు) పంచభుజి యొక్క కర్ణం కూడా అనిష్ప సంఖ్యే. దీనిని ముద్దుగా సువర్ణ సంఖ్య అని పిలుస్తారు. దీని విలువ (1 + ు5)/2. ఒక దీర్ఘ చతురస్రం పొడుగు

వెడల్పులకి మధ్య ఉండే నిష్పత్తి ఈ సువర్ణ సంఖ్యకి దగ్గరగా ఉంటే ఆ దీర్ఘ చతురస్రం కంటికి ఎంతో ఇంపుగా కనిపిస్తుందని చిత్రకారులు అంటారు. ఇలా చెప్పుకుంటూ పోతే అనిష్ప సంఖ్యలకి ఉదాహరణలు కొల్లలుగా దొరుకుతాయి. అందంగా ఉన్న వాళ్ళ ముఖాలు కొంచెం పరిశీలించి చూడండి. అవి గుండ్రంగా చంద్రబింబాన్ని పోలి ఉంటే చలివిడి ముద్దలాగో, బోర్లించిన సిబ్బిలాగో ఉందంటాం. కోలగా పొడుగ్గా ఉంటే గజం బద్దలా ఉందంటాం. ముఖం పొడవు, వెడల్పు మధ్య ఉండే నిష్పత్తి సువర్ణ సంఖ్యకి దగ్గరగా ఉన్నప్పుడు ఆ ముఖం అందంగా కనిపిస్తుందిట.

సంఖ్యలలో సరి సంఖ్యలు, బేసి సంఖ్యలు అని మరొక విభేదం ఉంది. ఇవే కాకుండా సంఖ్యలలో ధన సంఖ్యలు, రుణ సంఖ్యలు అని ఇంకొక విభేదం ఉంది. రుణ సంఖ్యల గురించి ముళ్ళపూడి వెంకటరమణ స్పష్టించిన అప్పారావుకే కాదు, అంతకు ముందే బీజగణితానికి బీజం పోసిన భాస్కరాచార్య కి కూడా తెలుసు: $2x + 7 = 3$ వంటి బీజగణిత సమీకరణాన్ని పరిష్కరించ వలసిన సందర్భంలో తప్పకుండా రుణ సంఖ్యల అవసరం కనిపిస్తుందని.

బీజగణితం ధర్మమా అని మనకి లభించిన సంఖ్యలలో మరొక జాతివి సంక్లిష్ట సంఖ్యలు (complex numbers). ఇలా ఎన్నెన్నో రకాల సంఖ్యలు గణితంలో అలా తారస పడుతూనే ఉంటాయి. వీటి గురించి అవకాశం దొరికినప్పుడు చర్చిద్దాం.

Transformed using పద్మ Version 0.1. Copyright © 2005 Nagarjuna Venna. All rights reserved.