

Diplomarbeit

**" Glättungsalgorithmen für Kurven
und Flächen in CAGD "**

Band 1 - Theoretischer Teil

von cand. inform. cand.math.

Bernd Hamann

**Institut für Programmiersprachen und Informationssysteme
Abteilung für Computer - Graphik
der Technischen Universität Braunschweig**

**Aufgabenstellung und Betreuung : Prof. Dr. Hagen ,
dipl. math. Guido Schulze**

Braunschweig , 31. Oktober 1987

Abstract

Bernd Hamann :

"Smoothing algorithms for curves and surfaces in CAGD"

After a general view over basic problems in CAGD results of the last years in smoothing curves and surfaces will be discussed in the presented master thesis. The division of the thesis is based on the historical development of suitable methods and on the fact, whether a method can be executed automatically.

The classical methods for curve and surface generation are described first (Lagrange - interpolation, Bezier-surfaces, Gordon-Coons-surfaces). Starting with these possibilities for generating curves and surfaces the term "smoothness" is presented and different definitions are given (absence of inflection points, minimizing of energy integrals, ...); it is explained, how to detect undesirable regions of curvature (bezierpolygon [Schelske, Brunet], reflexion lines [Hoschek], ...) and how to make them vanish.

According to a user's point of view those methods are most important which generate a smoothest curve / surface of a certain class in a first generation step (those methods must be given a fairness criterion naturally !); [Walter, Nowacki] and [Hagen] have introduced such methods based on results of differential geometry and on calculus of variation.

Considering practical aspects only those methods are taken in account here which require basic polynomials of quintic degree at most, so that C^2 curves and surfaces can be constructed; all algorithms presented here will be discussed for the C^1 and C^2 case only, because no higher continuity is required in practice.

The algorithms of [Brunet],[Walter, Nowacki] and [Hagen] have been implemented on an IBM-AT in order to get a possibility to compare resulting surfaces when the same input (- information) is given (points, derivatives, ...).

Kurzfassung

Bernd Hamann :

"Glättungsalgorithmen für Kurven und Flächen in CAGD"

In der vorliegenden Diplomarbeit sollen nach einem kurzen Überblick über grundsätzliche Problemstellungen in CAGD Resultate der letzten Jahre zur Glättung von Kurven und Flächen dargestellt werden.

Die Einteilung der Arbeit orientiert sich dabei einerseits an der historischen Entwicklung der geeigneten Verfahren, andererseits aber auch daran, inwieweit die zugehörigen Algorithmen automatisiert werden können.

Zunächst werden die klassischen Verfahren zur Kurven- und Flächengeneration beschrieben (Lagrange-Interpolation, kubische Splines, Bezierflächen, Coonsche Flächen).

Ausgehend von diesen Möglichkeiten, Kurven bzw. Flächen zu generieren, wird erläutert, wie der Begriff "Glattheit" verstanden werden kann (Wendepunktfreiheit, Minimierung eines Energieintegrals , ...), woran unerwünschte Krümmungsbereiche erkannt werden können (Bezierpolygone [Schelske, Brunet], Reflexionslinien [Hoschek], ...) und wie diese Bereiche beseitigt werden können.

Aus Gründen der Benutzerfreundlichkeit kommt den Verfahren besondere Bedeutung zu, die gleich im ersten Schritt einer Kurven- bzw. Flächengeneration eine Kurve / Fläche erzeugen, die gemäß eines vorgegebenen Kriteriums die glatteste Kurve / Fläche einer bestimmten Klasse ist. [Walter, Nowacki] und [Hagen] haben ausgehend von einem differentialgeometrischen Ansatz mit Mitteln der Variationsrechnung solche automatisierbaren Verfahren eingeführt.

Aus praktischen Erwägungen werden hier nur solche Verfahren berücksichtigt, die höchstens quintische Basispolynome erfordern, da damit C^2 - stetige Kurven / Flächen erzeugt werden können; da in der Praxis keine höheren Stetigkeitsbedingungen gefordert werden, sollen die Verfahren hier auch nur für den C^1 - bzw. C^2 - stetigen Fall diskutiert werden.

Schließlich sind die Verfahren von [Brunet], [Walter, Nowacki] und [Hagen] auf einem PC (IBM-AT) implementiert worden, um einen Vergleich der resultierenden Flächen bei Vorgabe gleicher Information (Punkte, Ableitungen, ...) zu ermöglichen.

Die vorliegende Diplomarbeit entstand am Institut für Programmiersprachen und Informationssysteme, Abteilung für Computergraphik, der Technischen Universität Braunschweig. Anreiz zur vorliegenden Arbeit war ein Seminarvortrag mit dem Titel "Glättungsalgorithmen", den ich im Sommersemester 1987 zur Vorlesung CAGD 2 gehalten habe.

Die von mir hier bearbeitete Aufgabe mit dem Thema "Glättungsalgorithmen für Kurven und Flächen in CAGD" wurde von meinen Betreuern, Herrn Prof. Dr. Hagen und Herrn Schulze, wie folgt formuliert :

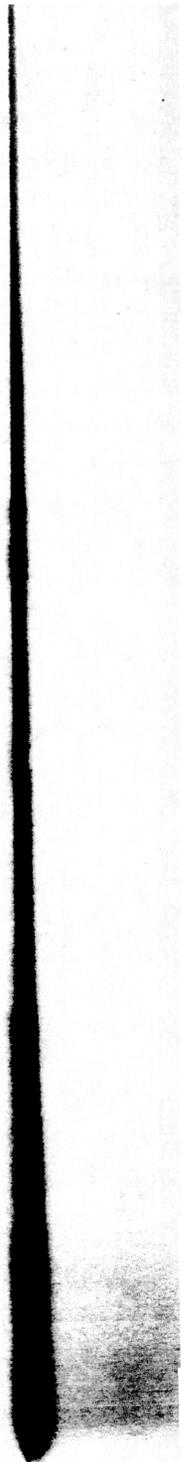
"Zahlreiche Verfahren zur Kurven- bzw. Flächengeneration neigen dazu, Ergebnisse zu liefern, die insofern unbefriedigend sind, als die resultierenden Kurven / Flächen lokal starke Oszillationen bzw. unnötig viele Wendepunkte (Kurven) / unnötige Vorzeichenwechsel der Gaußschen Krümmung (Flächen) aufweisen.

Stellen Sie vergleichend Verfahren zusammen, die sich dieser Problematik annehmen und unterscheiden Sie vor allem zwischen jenen, die einer interaktiven Modifikation von Kurven / Flächen bedürfen und solchen, die automatisch glatte Kurven / Flächen liefern. Stellen Sie die verschiedenen Konkretisierungen des Begriffes "glatt" heraus, berücksichtigen Sie, inwieweit die Verfahren lokalen bzw. globalen Charakter haben. Stellen Sie aus praktischen Erwägungen die vorgeschlagenen Lösungen höchstens für den C^2 -stetigen Fall dar.

Greifen Sie vor allem auf die Arbeiten von [Schelske], [Hoschek], [Brunet], [Walter, Nowacki] und [Hagen] zurück.

Implementieren Sie die Verfahren von [Brunet], [Walter, Nowacki] und [Hagen] und testen Sie vergleichend die "Güte" der sich ergebenden "glatten" Flächen."

Meinen lieben Eltern



	Seite
Symbole	4
Kapitel 0 : Einleitung	5
Kapitel 1 : Einführung in Fragestellungen der Interpolation	7
1. 1. Lagrange - Interpolation	7
1. 2. Kubische interpolierende Splines	9
1. 3. Bezier-Approximation /-Interpolation	12
1. 4. C^1 - TP - Bezierfläche	15
1. 5. Coons - Flächen	17
1. 5. 1. Das bilineare Coons - Patch	17
1. 5. 2. Das bikubische Coons - Patch	18
1. 5. 3. Transformation des TP - Ferguson - Patches in Bezier - Darstellung	20
1. 6. Bilder zu Kapitel 1	23
Kapitel 2 : Glättungsverfahren für segmentierte Bezierkurven und TP - Bezierflächen (SCHELSKE)	27
2. 1. Einleitung	27
2. 2. Zerlegung von Bezierpolynomen / Parameterintervall - Streckung	27
2. 2. 1. Zerlegung von Bezierpolynomen	27
2. 2. 2. Streckung des Parameterintervalls	28
2. 3. Einfluß der Parameterintervall - Streckung auf die Kurvengestalt	29
2. 4. Wendepunkte in Beziersubsplines und deren Beseitigung	30
2. 5. Glättung eines C^1 - stetigen kubischen Beziersubsplines	32
2. 6. Glättung eines C^2 - stetigen quintischen Beziersubsplines	33
2. 6. 1. Konkavität (Konvexität) des Bezierpolygons als hinreichendes Kriterium für Wendepunktfreiheit	34

2. 6. 2. Doppelnulstelle der Krümmung als notwendige und hinreichende Bedingung für Wendepunktfreiheit	35
2. 7. Glättung beliebiger Teile eines ebenen Bezierpolynoms	36
2. 8. Übertragung der Verfahren für ebene Bezierpolynome zur Glättung von TP - Bezierflächen	36
2. 8. 1. Streckung eines TP - Bezierflächensegmentes	36
2. 8. 2. Konkavitäts- (Konvexitäts-) Bedingungen für TP - Bezierflächen	37
2. 8. 3. Glättung mehrteiliger / segmentierter TP - Bezierflächen, speziell $C^{2,2}$ - stetige quintische TP - Bezierflächen	39
2. 9. Bilder zu Kapitel 2	41
Kapitel 3 : Glättungsverfahren für Kurven und Flächen nach HOSCHEK	44
3. 1. Erkennung unerwünschter Krümmungsbereiche	44
3. 1. 1. Polare Abbildung zur Erkennung von Wendepunkten	44
3. 1. 2. k - orthotomische Kurven zur Erkennung von Wendepunkten	46
3. 2. Glättungsverfahren von HOSCHEK	47
3. 2. 1. Interaktives Glätten mittels Dualkurven	47
3. 2. 2. Bezout - Determinante zum Prüfen von Wendepunktfreiheit	48
3. 3. Bilder zu Kapitel 3	51
Kapitel 4 : Glättungsverfahren für bikubische Flächen nach BRUNET	52
4. 1. Bestimmung der 4 Twists \vec{p}_{uv} an den Ecken eines Patches	52
4. 1. 1. Gewinnen der Twists aus dem FergusonPatch	52
4. 1. 2. Verwendung der Twists des bilinearen Coons - Patches (Adinis Twists)	53
4. 1. 3. Twist - Vorgabe nach Bessel	54
4. 2. Berechnung der Bezierpunkte und Brunets Kriterium für Glattheit	55
4. 3. Brunets Glättungsalgorithmus	56
4. 4. Bilder zu Kapitel 4	58

Kapitel 5 : Automatische Glättungsverfahren	59
5. 1. Glättungsalgorithmus nach WALTER und NOWACKI	59
5. 1. 1. Darstellung der Coons - Fläche nach Walter / Optimalforderung	59
5. 1. 2. Oberflächendarstellung und Optimalprinzip	60
5. 1. 3. Bestimmung des LGS zur Ermittlung der Twistvektoren $\vec{p}_{uv,k,l}$	64
5. 2. Glättungsalgorithmus nach HAGEN und SCHULZE	72
5. 2. 1. Einführung notwendiger Größen der Differentialgeometrie	72
5. 2. 2. Das Glattheitskriterium von Hagen	74
5. 2. 3. Glättung segmentierter Gordon - Coons - Flächen nach Hagen / Schulze	76
5. 2. 4. Automatischer Glättungsalgorithmus für C^2 - stetige biquintische Gordon - Coons - Flächen	77
5. 3. Bilder zu Kapitel 5	79
 Literaturangaben	 81

Liste der verwendeten Symbole

a, b, c, \dots	skalare Größen aus \mathbb{R}
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	skalare Größen aus \mathbb{R}
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$	Vektoren des \mathbb{R}^2 bzw. des \mathbb{R}^3
Γ	Christoffel - Symbol
δ	Kronecker - Symbol : $\delta_{i,j} = 1 \leftrightarrow i = j$ $\delta_{i,j} = 0 \leftrightarrow i \neq j$
σ	Funktional
\oplus	Boolesche Summe 2er Flächenprojektoren (Gordon - Coons - Flächen)

Kapitel 0 : Einleitung

Ein Hauptproblem, das sich in CAGD stellt, ist die Generierung ausreichend glatter Kurven bzw. Flächen. Hierbei ergibt sich sogleich die Frage, was unter "glatt" zu verstehen ist. Die existierenden Glättungsalgorithmen basieren meist auf unterschiedlichen Definitionen dieses Begriffes, so daß von vornherein nicht ersichtlich ist, welche vorgeschlagenen Glättungsverfahren auch befriedigende Ergebnisse liefern. In dieser Arbeit sollen mehrere Möglichkeiten aufgezeigt werden, gemäß eines vorgegebenen Glattheitskriteriums glatte Kurven / Flächen zu erzeugen. Zur Lösung dieser Problematik existieren zwei grundsätzliche Verfahren: die einen Verfahren liefern nach Vorgabe gewisser Eingabeinformation Kurven / Flächen, die nach dem ersten Generierungsschritt weiter interaktiv vom Benutzer so lange modifiziert werden müssen (können), bis schließlich ein befriedigendes Ergebnis erzielt ist; die anderen Verfahren liefern nach Eingabe sofort die glatteste Kurve / Fläche einer bestimmten Kurven-/ Flächenklasse durch ein Optimierungs-/Variationsprinzip. Automatische Glättungsalgorithmen sind von [Walter, Nowacki] und [Hagen] eingeführt worden. Im theoretischen Teil der Arbeit werden diese Arbeiten und die Lösungsvorschläge von [Schelske], [Hoschek] und [Brunet] abgehandelt; im praktischen Teil der Arbeit werden die Algorithmen von [Brunet], [Walter, Nowacki] und [Hagen] implementiert, um die Güte dieser Verfahren bei der Flächenerzeugung überprüfen zu können. Die Programme und Resultate dieses praktischen Teiles finden sich im 2. Band der vorliegenden Diplomarbeit.

Der theoretische Teil der Arbeit gliedert sich wie hier beschrieben in folgende Textkapitel:

In Kapitel 1 werden überblicksartig die klassischen Methoden wiederholt, Kurven und Flächen zu generieren. Als Kurvenschemata werden kurz die Lagrange-Interpolation, die Interpolation mit natürlichen kubischen Splines und die Approximation bzw. Interpolation mit Hilfe der Bezier-Technik vorgestellt. Als Flächenschemata werden TP-Flächen und Gordon-Coons-Flächen beschrieben, hier speziell das bilineare und bikubische Coons-Patch.

[Schelske] hat ausgehend von einem variationsreduzierenden Ansatz ein Verfahren beschrieben, segmentierte Bezierkurven/-Flächen zu glätten. Sein Lösungsvorschlag besteht darin, Wendepunkte in Bezierkurven bzw. Vorzeichenwechsel der Gaußschen Krümmung in Bezierflächen aufgrund der vorgegebenen Bezierpunkte / Beziernetze zu detektieren und durch eine Transformation der Bezierpunkte der betroffenen Segmente lokal die Kurven / Flächen zu glätten. Es gilt dabei, die Transformation der Bezierpunkte - [Schelske] streckt das zugrunde liegende Parameterintervall - gerade derart zu gestalten, daß jedes zu glättende Segment nur minimal korrigiert wird, d.h., optimale Streckungsfaktoren für die jeweiligen Segmente zu finden. Es werden Möglichkeiten dargestellt, C^1 - / C^2 - stetige Bezier-splines und $C^{2,2}$ - stetige TP-Bezierflächen zu glätten.

[Hoschek] hat mehrere Verfahren vorgestellt, unerwünschte Krümmungsbereiche in Bezierkurven / -Flächen über sogenannte duale Kurven / Flächen sichtbar zu machen. Sind in einer dualen Kurve / Fläche Singularitäten erkennbar, so liegt

in der gegebenen Kurve / Fläche ein unerwünschter Krümmungsbereich vor. Ist ein solcher Bereich über die duale Kurve / Fläche festgestellt, so kann mit Hilfe von z.B. [SCHELSKEs] Parameter - Transformation ein Wendepunkt interaktiv beseitigt werden. [HOSCHEK] schlägt aber auch eine sogenannte Bezout - Determinante als Hilfsmittel zur interaktiven Glättung vor.

[Brunet] hat ein Glattheitsmaß für bikubische Flächen angegeben. Er mißt die Glattheit eines Patches einer segmentierten Fläche daran, wie stark sich dessen innere Bezierpunkte von den Bezierpunkten unterscheiden, die man bei Vorgabe von Adinis Twists als innere Bezierpunkte erhalten würde; schließlich stellt das bilineare Coons-Patch bei Vorgabe der Randkurven ein im Innern minimal oszillierendes Patch dar. Es gilt also, ein unbefriedigendes Segment dadurch zu glätten, daß dessen Ecktwists derart modifiziert werden, daß sich das Patch dem bilinearen Coons-Patch annähert. Hierbei ist zu beachten, daß damit ein vorher evtl. gegebener Stetigkeitsgrad der Fläche zugunsten einer geringeren Oszillation aufgegeben wird.

In Kapitel 5 werden automatische Glättungsverfahren vorgestellt. Ausgehend von einem Energie-Minimierungsprinzip (analog zu kubischen Splines) hat [Walter] eine Methode entwickelt, aus einer vorgegebenen Flächenklasse bei gegebener Punktinformation die Fläche zu bestimmen, die das zugrundeliegende Energieintegral minimiert. [Walter] hat in seiner Dissertation diese Möglichkeit für eine C^1 - stetige segmentierte Gordon - Coons - Fläche formuliert. Die freien Parameter, die variiert werden können, sind die Twistvektoren; diese werden über ein LGS numerisch bestimmt. [Nowacki] geht über den Ansatz von [Walter] insofern hinaus, als er dessen Idee auf den C^2 - Fall ausdehnt (Schiffbau). [Hagen] geht ebenfalls über [Walter]s Idee hinaus; er verwendet auch den quintischen Fall und setzt zusätzlich eine größere Flächenklasse voraus, innerhalb derer die glatteste Fläche automatisch bestimmt wird. Ausgehend von einem differentialgeometrischen Ansatz wird die Flächenklasse abgegrenzt, für sie ein Glattheitskriterium aufgestellt und der zugehörige (automatische) Glättungsalgorithmus , der auf einem Variationsansatz basiert, beschrieben.

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr. Hagen und Herrn Schulze für deren konstruktive Kritik an dieser Arbeit.

Kapitel 1 : Einführung in Fragestellungen der Interpolation

1. 1. Lagrange - Interpolation

Das Hauptanliegen in CAGD besteht darin, zu vorgegebenen angeordneten Punkten des R^2 bzw. R^3 eine approximierende bzw. interpolierende Kurve anzugeben, die in einem bestimmten Sinn glatt sein soll. Im Fall der Flächengeneration kann entweder ein angeordnetes Punktenetz oder aber ein Netz von Kurven gegeben sein, das eine möglichst glatte Fläche erzeugen soll.

Da die Klasse der parametrisierten Kurven $(x(t), y(t), z(t))^T$ und parametrisierten Flächen $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$ über die Klasse der Funktionen $(t, x(t))$ bzw. $(u, v, z(u, v))^T$ hinausgeht, sollen hier von Anfang an Kurven und Flächen solcher Art behandelt werden.

Das Grundprinzip der Kurven- bzw. Flächengeneration kann am Beispiel der *Lagrange-Interpolation* leicht verdeutlicht werden :

gegeben : $(n+1)$ Punkte $\vec{p}_i := (x_i, y_i)^T$ bzw. $\vec{p} := (x_i, y_i, z_i)^T$; $i = 0 \dots n$

gesucht : interpolierende Kurve $\vec{p}(t)$, die die vorgegebenen Punkte mittels Lagrange-Polynomen interpoliert.

Lösung : 1. Festlegung einer Parametrisation $\{ t_0, \dots, t_n \}$

(i) äquidistante Parametrisation, d.h. $t_0 := t_{min}$,

$$t_i := t_0 + i * \Delta t ; \quad i = 1 \dots n$$

(speziell : $t_0 := 0$; $\Delta t := 1 \rightarrow t_i := i$)

(ii) chordale Parametrisation, d.h. $t_0 := t_{min}$,

$$t_i = t_{i-1} + d(\vec{p}_{i-1}, \vec{p}_i) ; \quad i = 1 \dots n$$

(hierbei ist $d(\vec{a}, \vec{b})$ der euklidische Abstand der beiden Punkte \vec{a} und \vec{b})

2. Angabe der zur speziellen unter 1. bestimmten Parametrisation gehörenden Lagrange - Basis $\{ L_0, \dots, L_n \}$

Jedes Basispolynom L_i habe die Eigenschaft, an der Stelle t_i den Wert 1 und an den Stellen $t_j, j \neq i$, den Wert 0 anzunehmen. Damit sind die L_i Polynome vom Grad n , die jeweils an n Stellen verschwinden ($L_i(t_j) = \delta_{i,j}$).

3. Berechnung der interpolierenden Kurve unter Verwendung der Punkte \vec{p}_i und der Basispolynome $L_i(t)$:

$$\vec{p}(t) := \sum_{i=0}^n \vec{p}_i * L_i(t) \quad (1.1)$$

Dieses Vorgehen kann mühelos auf die Interpolationsaufgabe, $(m+1) * (n+1)$ Punkte $\vec{p}_{i,j}$ eines angeordneten Punktenetzes im R^3 zu interpolieren,

übertragen werden. In diesem Fall müssen jedoch zwei Parameter u und v eingeführt werden, also auch bivariate Basispolynome $L_{i,j}(u,v)$. Das Problem stellt sich also wie folgt dar :

gegeben : $(m+1) * (n+1)$ Punkte $\vec{p}_{i,j}$ des \mathbb{R}^3 (Ordnung durch Indizes gegeben !)

gesucht : interpolierende Fläche $\vec{p}(u,v)$, die die gegebenen Punkte mittels Lagrange - Basispolynomen interpoliert

Lösung : 1. Festlegung der Parametrisation

(i) äquidistante Parametrisation, z.B. $u_i = i, v_j = j$;
 $i = 0 \dots m, j = 0 \dots n$

(ii) chordale Parametrisation, z.B. Berechnung der Parameter durch Mittelung der euklidischen Abstände :

$$u_0 = 0 ; \quad u_i = \frac{1}{n} * \sum_{j=0}^n d(\vec{p}_{i-1,j}, \vec{p}_{i,j}) ; \quad i = 1 \dots m$$

$$v_0 = 0 ; \quad v_j = \frac{1}{m} * \sum_{i=0}^m d(\vec{p}_{i,j-1}, \vec{p}_{i,j}) ; \quad j = 1 \dots n$$

2. Berechnung der Basispolynome $L_{i,j}(u,v)$

Verwendet man für beide Parametrisationen $\{u_0, \dots, u_m\}$ und $\{v_0, \dots, v_n\}$ das oben angegebene Schema, so erhält man zwei jeweils univariate Lagrange-Basen :
 $\{L_0(u), \dots, L_m(u)\}$ und $\{L_0(v), \dots, L_n(v)\}$.

Man sieht leicht ein, daß $L_{i,j}(u,v) = L_i(u) * L_j(v)$ die Eigenschaft besitzt, für $u_k = u_i$ und $v_l = v_j$ den Wert 1 zu haben, für alle anderen Tupel (u_k, v_l) aber verschwindet, d.h. : $L_{i,j}(u_k, v_l) = \delta_{i,k} * \delta_{j,l}$.

3. Berechnung der interpolierenden Fläche unter Verwendung der Punkte $\vec{p}_{i,j}$ und der Basispolynome $L_{i,j}(u,v)$:

$$\vec{p}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \vec{p}_{i,j} * L_j(v) * L_i(u) \quad (1.2)$$

Bem. : Die hier skizzierte Methode, eine Fläche zu generieren, führt zu einer sogenannten *Tensor-Produkt-Fläche* (*TP-Fläche*), da die einzelnen "Träger-Funktionen" in den Variablen u und v miteinander multipliziert werden.

Grundsätzlich läßt sich also sagen, daß hier nur zwei Größen eine Kurve bzw. eine Fläche bestimmen :

- die gegebenen Punkte (die als *Gewichte* fungieren)
- und
- die mit diesen Punkten gewichteten Basisfunktionen.

Die Charakteristiken der verwendeten Basisfunktionen bestimmen letztendlich das Aussehen der sich ergebenden Kurven bzw. Flächen.

1 f

Bei dem hier vorgestellten Verfahren ist zu bedenken, daß der Grad der zugrunde liegenden Lagrangepolynome desto höher ist, je mehr Punkte zu interpolieren sind. Dies hat zur Folge, daß resultierende Kurven bzw. Flächen sehr starke Oszillationen in den Bereichen zwischen den gegebenen zu interpolierenden Punkten aufweisen können (es wird ja keine Anforderung an das Verhalten eines Lagrangepolynoms zwischen zwei Parameterwerten t_i und t_{i+1} gestellt) . Aus diesem Grunde ist eine Interpolation mit Lagrange-Polynomen nur selten sinnvoll.

Beispiel : gegeben : 4 * 3 Punkte im \mathbb{R}^T
 u - Partition : { 0, 1, 2, 3 }
 v - Partition : { 0, 1, 2 }
 gesucht : Lagrange - Basispolynome

Lösung : folgende univariaten Polynome erfüllen die Eigenschaft $L_i(u_j) = 1$, wenn $i = j$,
 $L_i(u_j) = 0$, wenn $i \neq j$:

$$L_0(u) = -1/6 * (u-1) * (u-2) * (u-3)$$

$$L_1(u) = 1/2 * u * (u-2) * (u-3)$$

$$L_2(u) = -1/2 * u * (u-1) * (u-3)$$

$$L_3(u) = 1/6 * u * (u-1) * (u-2)$$

$$L_0(v) = 1/2 * (v-1) * (v-2)$$

$$L_1(v) = -v * (v-2)$$

$$L_2(v) = 1/2 * v * (v-1)$$

1. 2. Kubische interpolierende Splines

Kubische Splines stellen insofern eine wesentliche Verbesserung gegenüber den oben verwendeten Lagrange-Polynomen dar, da bei ihnen das Verhalten zwischen zwei aufeinanderfolgenden Parameterwerten streng durch ein Energieintegral festgelegt ist ; dies hier auftretende Integral kann gleichzeitig als *Glattheitsmaß* aufgefaßt werden. Die bei Lagrange-Polynomen höheren Grades auftretenden Oszillationen werden damit reduziert.

Stellt man an eine interpolierende Kurve lediglich die Anforderung C^2 - stetig zu sein, so läßt sich zeigen, daß eine stückweise kubische Kurve (meint, die zugrunde liegenden Basis-Funktionen sind stückweise kubische Polynome) erstens diese Forderung erfüllt und zweitens die Biegeenergie minimiert.

Stellt man sich das Problem, das Energieintegral $\int_{t_0}^{t_1} (f''(t))^2 dt$ für eine

zweifach stetig differenzierbare Funktion mit vorgegeben Randbedingungen zu minimieren, so stößt man auf eine Variationsaufgabe .

gegeben : Randbedingungen an den Rändern t_0 und t_1

$$(i) f(t_0) = a_0 , f(t_1) = a_1$$

$$(ii) f'(t_0) = b_0 , f'(t_1) = b_1$$

$$(iii) f''(t_0) = c_0 , f''(t_1) = c_1$$

gesucht : C^2 -stetige Funktion f , die die Randbedingungen erfüllt und für die der Wert $\int_{t_0}^{t_1} (f''(t))^2 dt$ minimal ist .

Lösung : 1. Lösen der *Eulerschen Differentialgleichung* (Variationsrechnung!) als notwendige Bedingung für eine Minimierung des Integrals :

Der Integrand als Funktion der Ableitungen von f lautet $F(f, f', f'') = f''^2$. Damit ergibt sich :

$$\frac{\partial F}{\partial f} = \frac{\partial F}{\partial f'} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial f''} = 2f''$$

Die Eulersche Differentialgleichung lautet also

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial F}{\partial f''} \right) &= \frac{d^2}{dt^2} 2f'' = \\ &= 2f^{(IV)} = 0 \\ \longleftrightarrow f^{(IV)} &= 0 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieser homogenen DGL ist damit gegeben durch :

$$f(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D \quad (1.3)$$

2. Die Eindeutigkeit der Lösung läßt sich beweisen, indem eine Funktion $s(t)$ angenommen wird, die ebenfalls das betrachtete Integral minimiert; es stellt sich dann heraus, daß $s(t) = f(t)$ gilt .

Bem. : Im Fall einer parametrisierten Kurve $(x(t), y(t))^T$ wird das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} (x''(t))^2 + (y''(t))^2 dt \quad \text{betrachtet und führt eben-}$$

falls zu jeweils kubischen Polynomen (analog für Kurven im \mathbb{R}^3).

Stellt man sich nun die Aufgabe, durch jeweils zwei vorgegebene Punkte \vec{p}_i und \vec{p}_{i+1} ein kubisches Kurvensegment mit C^2 -Anschluß zu den beiden angrenzenden Nachbarsegmenten zu legen, so besteht die Schwierigkeit darin, für jedes einzelne Kurvensegment $\vec{p}^{(i)}(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, die jeweiligen Koeffizienten der zugehörigen kubischen Polynome zu bestimmen, dieses wiederum jeweils für $x^{(i)}(t)$, $y^{(i)}(t)$ und evtl. $z^{(i)}(t)$.

gegeben : Punkte $\vec{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ bis \vec{p}_n ,
Parametrisation $\{t_0, \dots, t_n\}$

gesucht : Koeffizienten (- Vektoren) der n Polynome $\vec{p}^{(i)}(t)$,
 $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0 \dots n-1$.

Lösung : Berechnung der Koeffizientenvektoren aller Polynome der Art

$$(0) \quad \vec{p}^{(i)}(t) = \vec{d}_i (t-t_i)^3 + \vec{c}_i (t-t_i)^2 + \vec{b}_i (t-t_i) + \vec{a}_i, \quad i=0 \dots n-1$$

$$(1) \quad \vec{p}^{(0)}(t=t_i) = \vec{a}_i = \vec{p}_i \quad i = 0 \dots n-1$$

$$(2) \quad \vec{p}^{(i)'}(t=t_i) = \vec{p}^{(i-1)'}(t=t_i) \quad i = 1 \dots n-1$$

$$(3) \quad \vec{p}^{(i)''}(t=t_i) = \vec{p}^{(i-1)''}(t=t_i) \quad i = 1 \dots n-1$$

(3) in (0) eingesetzt liefert mit $h_i = t_i -$

$$(4) \quad \vec{d}_{i-1} = \frac{1}{h_{i-1}} * (\vec{c}_i - \vec{c}_{i-1}) \quad i = 1 \dots n-1$$

(4) in (0) eingesetzt liefert

$$(5) \quad \vec{b}_{i-1} = \frac{1}{h_{i-1}} * (\vec{a}_i - \vec{a}_{i-1}) - \frac{h_{i-1}}{3} * (\vec{c}_i - \vec{c}_{i-1}), \quad i = 1 \dots n-1$$

(4) und (5) in (0) eingesetzt liefert

$$(6) \quad h_{i-1} * \vec{c}_{i-1} + (2(h_{i-1} - h_i)) * \vec{c}_i + h_i * \vec{c}_{i+1} \\ = 3 * \left(\frac{1}{h_{i+1}} * (\vec{a}_{i+1} - \vec{a}_i) - \frac{1}{h_{i-1}} * (\vec{a}_i - \vec{a}_{i-1}) \right) \quad i = 1 \dots n-1$$

Mittels (6), (5) und (4) können nacheinander die unbekannten Größen \vec{b}_i , \vec{c}_i und \vec{d}_i bestimmt werden, wobei (6) ein tridiagonales, diagonaldominantes LGS darstellt. Da insgesamt $n+1$ Unbekannte \vec{c}_i zu berechnen sind, andererseits aber nur $n-1$ Gleichungen gegeben sind, können \vec{c}_0 und \vec{c}_n vorgegeben werden.

Bem.: Wählt man in (6) $\vec{c}_0 = \vec{c}_n = \vec{0}$, so spricht man von einem *natürlichen kubischen Spline* (Randkrümmungen sind damit 0).

Soll entsprechend der unter 1.1. vorgestellten Lagrange-Interpolation eine Basis bestehend aus jeweils kubischen Splines verwendet werden, so werden die Bedingungen für jeden Spline wie folgt aufgestellt:

gegeben : Parametrisation $\{t_0, \dots, t_n\}$; Punkte \vec{p}_i , $i = 0 \dots n$
 gesucht : $(n+1)$ kubische *Kardinalsplines*, mit der Eigenschaft

$$C_i(t_j) = \delta_{i,j} \quad i = 0 \dots n$$

Lösung : Es ist $(n+1)$ -mal der oben vorgestellte Algorithmus zur Bestimmung eines kubischen Splines anzuwenden; die Kardinalfunktionen $C_i(t)$ können dann wie die Basispolynome der Lagrange-Kardinalbasis unmittelbar mit den gegebenen

Punkten \vec{p}_i gewichtet werden :

$$\vec{p}(t) = \sum_{i=0}^n \vec{p}_i * C_i(t) \quad (1.4)$$

$$i = 0 \dots n, \\ t \in [t_0, t_n]$$

Für die Anwendung ist dieses Vorgehen jedoch ungeeignet, da allein zur Berechnung der Kardinalfunktionen der $(n+1)$ -fache Aufwand entsteht verglichen mit dem Interpolations-Algorithmus ohne Kardinalbasis.

Das Verfahren kann in gleicher Weise wie bei der Lagrange-Kurveninterpolation auf die Interpolation von Flächen übertragen werden ; formuliert man die entstehende Fläche mit jeweils kubischen Kardinalsplines in den Variablen u und v , so gilt für einen Punkt der Fläche :

$$\vec{p}(u, v) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m \vec{p}_{i,j} * C_i(u) * C_j(v) \quad (1.5)$$

Im Fall geschlossener Splines ist zu berücksichtigen, daß entsprechende Periodizitätsbedingungen anzugeben sind. So muß zum Beispiel gelten, daß $h_n = h_0$, $h_{n+1} = h_1, \dots$ und $\vec{p}_n = \vec{p}_0, \vec{p}_{n+1} = \vec{p}_1, \dots$. Bei Aufstellung des zugehörigen LGS zur Bestimmung der Koeffizienten (- Vektoren) \vec{c}_i erhält man dann natürlich ein *zyklisch* tridiagonales LGS.

Es ist an dieser Stelle noch darauf hinzuweisen, daß sowohl Lagrange- als auch kubische Interpolation Verfahren sind, die *global* sind, d.h., jeder einzelne gegebene Stützpunkt hat Einfluß auf das Aussehen der gesamten Kurve. Dies ist im Sinn einer möglichst *lokal* modifizierbaren Kurve höchst unbefriedigend.

1.3. Bezier - Approximation / - Interpolation

Bei Verwendung der Bezier-Technik werden andere Basispolynome, sogenannte *Bernstein - Polynome*, benötigt. Ein Bernstein-Polynom vom Grad n in der Variablen t ist dabei wie folgt definiert :

$$B_i^n(t) := \frac{1}{(b-a)^n} * \binom{n}{i} * \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-i} * \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^i; \quad i = 0 \dots n, t \in [a, b] \quad (1.6)$$

Diese Basis-Polynome zeichnen sich dadurch aus, daß

1. $B_i^n(t)$ für $t = a$ eine i -fache Nullstelle hat ,
2. $B_i^n(t)$ für $t = b$ eine $(n-i)$ -fache Nullstelle hat ,
3. $B_i^n(t)$ in $[a, b]$ genau ein Maximum für $t = a + (b-a) * \frac{i}{n}$ hat ,
4. $B_i^n(t) \geq 0$ für $t \in [a, b]$ (*Positivität*) ,
5. $B_i^n(t) = ((b-t) * B_i^{n-1}(t) + (t-a) * B_{i-1}^{n-1}(t)) / (b-a)$ (*Rekursion*) ,
6. $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \equiv 1$ für $t \in [a, b]$.

Die Eigenschaften 1. - 3. garantieren, daß ein Bernstein-Polynom in $[a, b]$ keine Oszillationen enthalten kann; 4. und 6. lassen die Bernstein-Polynome geeignet erscheinen, mit irgendwelchen Größen - das sind natürlich Punkte - gewichtet zu werden; Eigenschaft 5. gestattet ein rekursives Auswerten der Bernstein-Polynome.

Die Bernstein-Polynome vom Grad 2 über $[0, 1]$ sind die quadratischen Polynome

$$(i) B_0^2(t) = (1-t)^2, \quad (ii) B_1^2(t) = 2*(1-t)*t, \quad (iii) B_2^2(t) = t^2$$

Die Bernstein-Polynome vom Grad 3 über $[0, 1]$ sind die kubischen Polynome

$$(i) B_0^3(t) = (1-t)^3 \quad (ii) B_1^3(t) = 3*(1-t)^2*t$$

$$(iii) B_2^3(t) = 3*(1-t)*t^2, \quad (iv) B_3^3(t) = t^3$$

Werden $n+1$ Bernstein-Polynome $B_i^n(t)$ mit gegebenen *Bezierpunkten* $\vec{b}_i, i=0\dots n$, gewichtet, so erhält man ein *Bezier-Polynom* vom Grad n :

$$\vec{b}(t) := \sum_{i=0}^n \vec{b}_i * B_i^n(t) = \vec{b}_0 B_0^n + \dots + \vec{b}_n B_n^n \quad (1.7)$$

Von Interesse sind noch die ersten beiden Ableitungen des Bezier-Polynoms :

$$\vec{b}'(t) = \dots = \frac{1}{b-a} * \frac{n!}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^1 \vec{b}_i * B_i^{n-1}(t) \quad \text{und} \quad (1.8)$$

$$\vec{b}''(t) = \dots = \frac{1}{(b-a)^2} * \frac{n!}{(n-2)!} \sum_{i=0}^{n-2} \Delta^2 \vec{b}_i * B_i^{n-2}(t) \quad (1.9)$$

Hierbei sind $\Delta^1 \vec{b}_i := \vec{b}_{i+1} - \vec{b}_i$ und $\Delta^2 \vec{b}_i := \vec{b}_{i+2} - 2\vec{b}_{i+1} + \vec{b}_i$ Vorwärtsdifferenzen der gegebenen Bezierpunkte.

Mit den Formeln (1.7), (1.8) und (1.9) läßt sich leicht erkennen, daß nur die Bezierpunkte \vec{b}_0, \vec{b}_1 und \vec{b}_2 bzw. $\vec{b}_{n-2}, \vec{b}_{n-1}, \vec{b}_n$ die Ableitungen an den Rändern des Bezier-Polynoms bestimmen. Es gilt für $[a, b] = [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \vec{b}(0) &= \vec{b}_0, & \vec{b}(1) &= \vec{b}_n, \\ \vec{b}'(0) &= n * (\vec{b}_1 - \vec{b}_0), & \vec{b}'(1) &= n * (\vec{b}_n - \vec{b}_{n-1}), \\ \vec{b}''(0) &= n * (n-1) * (\vec{b}_2 - 2\vec{b}_1 + \vec{b}_0), & \vec{b}''(1) &= n * (n-1) * (\vec{b}_{n-2} - 2\vec{b}_{n-1} + \vec{b}_n). \end{aligned}$$

Interessant sind diese Beziehungen in dem Fall, daß einzelne Bezier-Segmente unter Erfüllung bestimmter Stetigkeitsanforderungen zusammengesetzt werden sollen.

Bem. : Alle hier aufgeführten Beziehungen für die Ableitungen bis zum 2. Grad können natürlich mit (1.7), (1.8) und (1.9) auf das allgemeine Definitionsgebiet $[a, b]$ übertragen werden.

Bei einem Bezier-Polynom vom Grad n bei gegebenen $(n+1)$ Bezierpunkten liegen also lediglich \vec{b}_0 und \vec{b}_n auf der Kurve $\vec{b}(t)$. Im "Innern" der Kurve weiß man zwar, daß "in der Nähe" von \vec{b}_i die Kurve $\vec{b}(t)$ am stärksten von \vec{b}_i beeinflusst

wird, da aber alle gegebenen Bezierpunkte Einfluß auf das Aussehen der resultierenden Kurve haben, ist das lokale Aussehen letztendlich nur schwer vorherzusehen. Aus diesem Grunde wird folgendermaßen verfahren :

- (i) Es werden $(n+1)$ Punkte \vec{p}_i vorgegeben, die zu *interpolieren* (!) sind.
- (ii) Es wird eine Stetigkeits-Bedingung vorgegeben, die vorschreibt, wie oft die einzelnen zu berechnenden Kurven-Segmente an ihren Rändern stetig differenzierbar sein sollen.
- (iii) Die einzelnen Kurven-Segmente sollen jeweils Bezier-Polynome sein, die einen Grad haben, der die Stetigkeits-Bedingungen erfüllen läßt.
- (iv) Steht der Grad der Bezier-Polynome fest, so kann zunächst gesetzt werden :

$$\vec{b}_0^{(i)} := \vec{p}_i \quad \text{und} \quad \vec{b}_n^{(i)} := \vec{p}_{i+1} \quad ; \quad i = 0 \dots n-1$$

(Der obere Index stehe für das Segment.)

Exemplarisch soll jetzt der Fall erörtert werden, daß die Punkte $\vec{p}_0 \dots \vec{p}_n$ segmentweise mit jeweils kubischen Bezier-Polynomen C^2 -stetig interpoliert werden. Aus 1.2 ist bekannt, daß ein C^2 -stetiger Übergang mit jeweils kubischen Polynomen erreicht werden kann ; folglich sind für jedes Kurven-Segment 4 Bezierpunkte derart zu bestimmen, daß sich ein C^2 -Übergang ergibt.

Die notwendigen Bedingungen lassen sich aus folgenden Beziehungen herleiten (äquidistante Parametrisation - $t_0 = 0, \dots, t_n = n$ - vorausgesetzt) :

$$(i) \quad \vec{b}_{3i} := \vec{p}_i \quad , \quad i = 0 \dots n$$

- (ii) nach (1.8) gilt für die Ableitung am Rand eines kubischen Bezier-segmentes :

$$\vec{b}'(0) = 3 * (\vec{b}_1 - \vec{b}_0) \quad \text{bzw.} \quad \vec{b}'(1) = 3 * (\vec{b}_3 - \vec{b}_2)$$

- (iii) nach (1.9) folgt analog für die 2.Ableitung am Rand :

$$\vec{b}''(0) = 3 * 2 * (\vec{b}_2 - 2\vec{b}_1 + \vec{b}_0) \quad \text{bzw.} \quad \vec{b}''(1) = 3 * 2 * (\vec{b}_3 - 2\vec{b}_2 + \vec{b}_1)$$

- (iv) mit (ii) und (iii) folgt also zum Erhalt eines C^2 -stetigen Übergangs an einem Segmentübergang :

$$(1.) \quad (\vec{b}_{3i+1} - \vec{b}_{3i}) \stackrel{!}{=} (\vec{b}_{3i} - \vec{b}_{3i-1})$$

$$(2.) \quad (\vec{b}_{3i+2} - 2\vec{b}_{3i+1} + \vec{b}_{3i}) \stackrel{!}{=} (\vec{b}_{3i} - 2\vec{b}_{3i-1} + \vec{b}_{3i-2})$$

$$\langle \Rightarrow \rangle \quad 2\vec{b}_{3i-1} - \vec{b}_{3i-2} =: \vec{d}_i = 2\vec{b}_{3i+1} - \vec{b}_{3i+2}$$

Es läßt sich damit formulieren :

$$2\vec{b}_{3i-4} - \vec{b}_{3i-5} = \vec{d}_{i-1} = 2\vec{b}_{3i-2} - \vec{b}_{3i-1}$$

$$2\vec{b}_{3i-1} - \vec{b}_{3i-2} = \vec{d}_i = 2\vec{b}_{3i+1} - \vec{b}_{3i+2}$$

$$2\vec{b}_{3i+2} - \vec{b}_{3i+1} = \vec{d}_{i+1} = 2\vec{b}_{3i+4} - \vec{b}_{3i+5}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{d}_{i-1} + 2\vec{d}_i = 3\vec{b}_{3i-1}$$

$$2\vec{d}_i + \vec{d}_{i+1} = 3\vec{b}_{3i+1}$$

$$\vec{d}_{i-1} + 4\vec{d}_i + \vec{d}_{i+1} = 3(\vec{b}_{3i-1} + \vec{b}_{3i+1}) \stackrel{(1.)}{=} 6\vec{b}_{3i}$$

Lösen des entstandenen tridiagonalen, diagonaldominanten LGS

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & \dots & & & & & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \vec{d}_0 \\ \vec{d}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{d}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \vec{b}_1 \\ 6 & \vec{b}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ 6 & \vec{b}_{3n-3} \\ 3 & \vec{b}_{3n-1} \end{bmatrix}$$

liefert die unbekanntenen Vektoren \vec{d}_i , mit denen alle inneren Bezierpunkte $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_4, \vec{b}_5, \dots, \vec{b}_{3n-2}, \vec{b}_{3n-2}$ durch Drittelung der Verbindungsstrecken zweier aufeinanderfolgender Punkte \vec{d}_i und \vec{d}_{i+1} :

$$\vec{b}_{3i+1} = \vec{d}_i + \frac{1}{3} * (\vec{d}_{i+1} - \vec{d}_i) \quad \text{bzw.} \quad \vec{b}_{3i+2} = \vec{d}_i + \frac{2}{3} * (\vec{d}_{i+1} - \vec{d}_i)$$

(i = 0 ... n-1).

Bem.: Bei Aufstellung des LGS fällt auf, daß die beiden *Freiheitsgrade* \vec{b}_1 und \vec{b}_{3n-1} vorgegeben werden müssen. Im Falle $\vec{d}_0 = \vec{b}_0$ und $\vec{d}_n = \vec{b}_{3n}$ folgt, daß die ersten bzw. letzten drei Bezierpunkte kollinear sind und der entstehende Spline damit in seinen Enden die Krümmung 0 hat; man spricht dann von einem *natürlichen kubischen Spline*.

Es ist damit möglich, jedes einzelne Kurvenssegment als Bezierpolynom vom Grad 3 mit den zugehörigen Bezierpunkten $\vec{b}_{3i}, \dots, \vec{b}_{3i+3}$, $i = 0 \dots n-1$, auszuwerten.

Zur Auswertung eines Bezierpolynoms bietet sich aufgrund der Rekursionseigenschaft der Bernstein-Polynome (s. 1.3., Eigenschaft 6) eine nach de Casteljau benannte Methode an. Dabei werden Bezierpunkte solange linear miteinander kombiniert, bis der Wert / Kurvenpunkt für einen bestimmten Parameterwert t berechnet ist:

$$\begin{array}{llll} \vec{b}_0 & = & \vec{b}_{0,0} & \\ \vec{b}_1 & = & \vec{b}_{1,0} & \vec{b}_{1,1} \\ \vec{b}_2 & = & \vec{b}_{2,0} & \vec{b}_{2,1} & \vec{b}_{2,2} \\ \dots & & \dots & \dots & \vec{b}_{3,2} \\ \vec{b}_{n-1} & = & \vec{b}_{n-1,0} & \vec{b}_{n-1,1} & \vec{b}_{n-1,2} \\ \vec{b}_n & = & \vec{b}_{n,0} & \vec{b}_{n,1} & \vec{b}_{n,2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{de Casteljau - Schema} \\ \\ \\ \\ \\ \vec{b}_{n,n} = \vec{b}(t) \quad , \quad t \in [a, b] \end{array} \quad (1.10)$$

Als Berechnungsvorschrift gilt: $\vec{b}_{i,j} := ((b-t) * \vec{b}_{i-1,j-1} + (t-a) * \vec{b}_{i,j-1}) / (b-a)$;
 $j=1 \dots n, \quad i=j \dots n.$

1.4. C¹ - TP - Bezierfläche

Sind im Raum $(m+1) * (m+1)$ Punkte $\vec{b}_{0,0}, \vec{b}_{3,0}, \vec{b}_{6,0}, \dots, \vec{b}_{3m,0}, \dots, \vec{b}_{0,3n}, \vec{b}_{3,3n}, \dots, \vec{b}_{3m,3n}$ gegeben, die hier gleich als zu interpolierende

Bezierpunkte aufgefaßt werden, so stellt sich das Problem, ein durch jeweils 4 Bezierpunkte gegebenes Flächen-Segment - *Patch* genannt - mit den unter 1. 3. angegebenen Verfahren zu berechnen.

Man verfährt dazu folgendermaßen

- (1.) Generation aller inneren Bezierpunkte der jeweils kubischen Splines in u -Parameter-"Richtung" (das sind $n+1$ Splines !)
 $\Rightarrow \vec{b}_{3i+1, j}, \vec{b}_{3i+2, j} \quad ; \quad j = 0, 3, 6, \dots, 3n, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1$
- (2.) Generation aller inneren Bezierpunkte der jeweils kubischen Splines in v -Parameter-"Richtung" (das sind $3m+1$ Splines !)
 $\Rightarrow \vec{b}_{1, 3j+1}, \vec{b}_{1, 3j+2} \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots, 3n, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1$

Das Verfahren basiert also auf einer zweifachen Anwendung des gewöhnlichen Algorithmus' zur Konstruktion einer Bezierkurve. Es werden zunächst die erforderlichen Bezierpunkte für ($n+1$) Bezierkurven mit Parameter u berechnet ; ausgehend von den erhaltenen Punkten können in einem zweiten Schritt die benötigten Bezierpunkte für ($3m+1$) Bezierkurven mit Parameter v hergeleitet werden. Ein einzelnes *bikubisches TP - Bezier - Patch* wird damit wie folgt definiert :

$$\begin{aligned} \vec{b}(u, v) &:= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \vec{b}_{i,j} * B_j^3(v) * B_i^3(u) & (1. 11) \\ &= \sum_{i=0}^3 \vec{a}_i(v) * B_i^3(u) \end{aligned}$$

Die zweite Formulierung von $\vec{b}(u, v)$ verdeutlicht, daß zur Berechnung eines Patch - / Flächenpunktes der de Casteljau - Algorithmus zweifach anzuwenden ist. Soll $\vec{b}(u, v)$ ermittelt werden , so ist folgendermaßen vorzugehen :

- (1.) berechne $\vec{a}_i(v)$ mit den 4 Bezierpunkten $\vec{b}_{1,0}, \vec{b}_{1,1}, \vec{b}_{1,2}, \vec{b}_{1,3}$
 $i = 0..3$ und unter Verwendung des de Casteljau - Algorithmus
 (Parameter ist v)
- (2.) berechne $\vec{b}(u, v)$ mit den 4 unter 1. gefundenen 4 Bezierpunkten
 $\vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ und unter Verwendung des de Casteljau - Algo -
 rithmus (Parameter ist u)

Hieraus wird ersichtlich, daß zur Ermittlung eines Patch-Punktes $\vec{b}(u, v)$ insgesamt 5-mal der de Casteljau - Algorithmus zur Berechnung eines Kurvenpunktes anzuwenden ist. Da der Berechnungsaufwand für einen Kurvenpunkt $O(n^2)$ beträgt, ist dies auch der Aufwand, um einen Patch-Punkt zu erhalten.

Man bedenke, daß bei dieser Methode nur die $(m+1) * (n+1)$ Punkte $\vec{b}_{3i, 3j}$ als gegebene Information zur Verfügung stehen ; Anforderungen an "Glatt - heit" der die Patches begrenzenden Kurven oder gar die Form der Patches selbst werden nicht gestellt . Entsprechend können - wie dies Eigenart der kubischen Splines ist - in der sich ergebenden bikubischen Fläche Oszillationen auftreten.

1. 5. Coons - Flächen

All den bisher vorgestellten Verfahren ist gemeinsam, daß immer nur endlich viele Punkte als zu interpolierende Objekte gegeben sind. Zur Erzeugung eines Patches stehen also lediglich die 4 Eckpunkte als Information zur Verfügung. Coons geht bei der Patch-Erzeugung davon aus, daß alle 4 das Patch begrenzenden Randkurven gegeben sind ; die Methode wird aus diesem Grund auch als eine *transfinite Methode* bezeichnet.

1. 5. 1. Das bilineare Coons - Patch

Sind längs der 4 Ränder eines Patches alle 4 Randkurven in der Form $\vec{p}(0, v)$, $\vec{p}(1, v)$, $\vec{p}(u, 0)$ und $\vec{p}(u, 1)$ gegeben - u und $v \in [0, 1]$ -, so werden im Fall des *bilinearen Coons - Patches* korrespondierende Punkte "gegenüber - liegender" Kurven linear durch Geradenstücke interpoliert. Man erhält damit 2 Teilflächen der Form

$$\begin{aligned}\vec{p}_1(u, v) &:= (1-u) * \vec{p}(0, v) + u * \vec{p}(1, v) \quad \text{und} \\ \vec{p}_2(u, v) &:= (1-v) * \vec{p}(u, 0) + v * \vec{p}(u, 1)\end{aligned}$$

Addiert man diese beiden Teilflächen, so erhält man eine Fläche, die an ihren Rändern nicht mehr mit den gegebenen Randkurven übereinstimmt. Es muß also ein Korrekturglied hinzugefügt werden, so daß diese Bedingung nicht verletzt wird. Man findet dieses Korrekturglied, indem man den *Projektor* \vec{p}_2 auf $\vec{p}_1(u, 0)$ und $\vec{p}_1(u, 1)$ anwendet :

$$\begin{aligned}\vec{p}_1(u, 0) &= (1-u) * \vec{p}(0, 0) + u * \vec{p}(1, 0) \\ \vec{p}_1(u, 1) &= (1-u) * \vec{p}(0, 1) + u * \vec{p}(1, 1) \quad \text{und damit} \\ \vec{p}_3(u, v) &= (1-v) * \vec{p}_1(u, 0) + v * \vec{p}_1(u, 1) \\ &= (1-v) * \left((1-u) * \vec{p}(0, 0) + u * \vec{p}(1, 0) \right) \\ &\quad + v * \left((1-u) * \vec{p}(0, 1) + u * \vec{p}(1, 1) \right)\end{aligned}$$

Das gleiche Resultat fände man auch durch Anwendung des Projektors \vec{p}_1 auf $\vec{p}_2(0, v)$ und $\vec{p}_2(1, v)$. Die *bilineare Coons - Fläche*, die die Randkurven erhält, ist damit gegeben durch

$$\vec{p}(u, v) := \vec{p}_1(u, v) + \vec{p}_2(u, v) - \vec{p}_3(u, v) \quad (1.12)$$

Diese Darstellung wird auch als *Boolesche Summe* $\vec{p} := \vec{p}_1 \oplus \vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_2(\vec{p}_1)$ geschrieben und bezeichnet.

Bemerkenswert ist auch, daß $\vec{p}_3(u, v)$ allein eine bilineare TP - Fläche dar - stellt, die man unter Anwendung der bereits vorgestellten TP - Techniken er - halten würde. Hieraus erkennt man, daß die Coons - Flächen eine allgemeinere Klasse darstellen als die TP - Flächen (ganze Randkurven, nicht nur Eckpunkte gegeben !) .

Sollen jedoch mehrere bilineare Coons - Patches zu einer segmentierten Fläche zusammengesetzt werden, so liegt an den Patch - Übergängen lediglich C^0 -Stetigkeit vor, da in die Konstruktionsvorschrift eines Patches lediglich die Randkurven, aber nicht die Ableitungen von u - oder v -Parameter-Linien auf dem Patch in irgendeiner Weise vorgeschrieben werden.

Um wenigstens eine C^1 -stetige segmentierte Coons - Fläche zu erhalten, verwendet man kubische statt der linearen Basisfunktionen; die verwendeten Basisfunktionen werden auch *blending functions* genannt.

1. 5. 2. Das bikubische Coons - Patch

Sollen anstelle linearer blending functions kubische blending functions verwendet werden, um "gegenüberliegende" Randkurven zu interpolieren, so bedarf es neben der reinen Kurven-Information noch der Normalen-Ableitungen längs aller 4 Randkurven: $\vec{p}_u(0, v)$, $\vec{p}_u(1, v)$, $\vec{p}_v(u, 0)$ und $\vec{p}_v(u, 1)$. Damit können benachbarte Patches C^1 -stetig miteinander verbunden werden.

Sollen 2 Punkte \vec{p}_0 und \vec{p}_1 , zu denen jeweils auch die Tangenten \vec{p}'_0 und \vec{p}'_1 gegeben sind, kubisch interpoliert werden, so bietet sich eine Gewichtung gewisser Basispolynome mit diesen 4 Größen an. Als geeignete Basis verwendet man üblicherweise die *Hermite - Polynome* 3. Grades, für die also gelten muß:

- (i) $H_0(0) = 1 \wedge H_0(1) = 0 \wedge H'_0(0) = 0 \wedge H'_0(1) = 0$
- (ii) $H_1(0) = 0 \wedge H_1(1) = 1 \wedge H'_1(0) = 0 \wedge H'_1(1) = 0$
- (iii) $\bar{H}_0(0) = 0 \wedge \bar{H}_0(1) = 0 \wedge \bar{H}'_0(0) = 1 \wedge \bar{H}'_0(1) = 0$
- (iv) $\bar{H}_1(0) = 0 \wedge \bar{H}_1(1) = 0 \wedge \bar{H}'_1(0) = 0 \wedge \bar{H}'_1(1) = 1$

Durch Koeffizientenvergleich und Lösen des sich ergebenden LGS erhält man 4 kubische Basispolynome, die jeweils (i), (ii), (iii) oder (iv) erfüllen:

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 & H_1(t) &= 3t^2 - 2t^3 \\ \bar{H}_0(t) &= t - 2t^2 + t^3 & \bar{H}_1(t) &= -t^2 + t^3 \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{oder } & [H_0(t), H_1(t), \bar{H}_0(t), \bar{H}_1(t)] \\ &= [1, t, t^2, t^3] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} =: T * C \quad (1.13) \end{aligned}$$

H_0 und H_1 interpolieren also die Punkte, \bar{H}_0 und \bar{H}_1 die Tangenten

Für einen Kurvenpunkt $t \in [0, 1]$ - muß also gelten

$$\vec{p}(t) = \sum_{i=0}^1 \vec{p}_i * H_i(t) + \vec{p}'_i * \bar{H}_i(t) \quad (1.14)$$

Wendet man die Hermite-Interpolation zur Interpolation "gegenüberliegender" Patch-Randkurven an, dann stellen sich $\vec{p}_1(u, v)$ und $\vec{p}_2(u, v)$ so dar :

$$\vec{p}_1(u, v) := \sum_{i=0}^1 \vec{p}(i, v) * H_i(u) + \vec{p}_u(i, v) * \bar{H}_i(u) \quad ,$$

$$\vec{p}_2(u, v) := \sum_{j=0}^1 \vec{p}(u, j) * H_j(v) + \vec{p}_v(u, j) * \bar{H}_j(v)$$

$$u, v \in [0, 1]$$

Wertet man $\vec{p}_1(u, v)$ für $v = 0$ und $v = 1$ aus, so ergibt sich

$$\vec{p}_1(u, 0) = \sum_{i=0}^1 \vec{p}(i, 0) * H_i(u) + \vec{p}_u(i, 0) * \bar{H}_i(u)$$

$$\vec{p}_1(u, 1) = \sum_{i=0}^1 \vec{p}(i, 1) * H_i(u) + \vec{p}_u(i, 1) * \bar{H}_i(u)$$

Wendet man Projektor \vec{p}_2 nun auf $\vec{p}_1(u, 0)$ und $\vec{p}_1(u, 1)$ an, so erhält man das Korrekturglied $\vec{p}_3(u, v)$:

$$\vec{p}_3(u, v) = \sum_{j=0}^1 \left\{ \sum_{i=0}^1 \left(\left(\vec{p}(i, j) * H_i(u) + \vec{p}_u(i, j) * \bar{H}_i(u) \right) * H_j(v) + \left(\vec{p}_v(i, j) * H_i(u) + \vec{p}_{uv}(i, j) * \bar{H}_i(u) \right) * \bar{H}_j(v) \right) \right\} \quad (1.15)$$

Es fällt auf, daß zur Berechnung von \vec{p}_3 die gemischt partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \vec{p}$ für die 4 Eckpunkte des Patches gegeben sein müssen, was sie nach

Voraussetzung aber nicht sind. Die geeignete Bestimmung dieser sogenannten *Twists* im Sinne der Erzeugung "glatter" Patches wird in den folgenden Kapiteln erörtert werden müssen (Einfluß der *Twists* primär abhängig von der Art der zugrunde liegenden Parametrisation !) .

Das bikubische Coons-Patch hat damit die Matrizen-Darstellung

$$\vec{p}(u, v) := \vec{p}_1(u, v) + \vec{p}_2(u, v) - \vec{p}_3(u, v)$$

=

$$\begin{aligned} & \left[H_0(u), H_1(u), \bar{H}_0(u), \bar{H}_1(u) \right] * \left[\vec{p}(0, v), \vec{p}(1, v), \vec{p}_u(0, v), \vec{p}_u(1, v) \right]^T \\ & + \left[\vec{p}(u, 0), \vec{p}(u, 1), \vec{p}_v(u, 0), \vec{p}_v(u, 1) \right]^T * \left[H_0(v), H_1(v), \bar{H}_0(v), \bar{H}_1(v) \right] \end{aligned}$$

$$- [H_0(u), H_1(u), \bar{H}_0(u), \bar{H}_1(u)]$$

$$* \begin{bmatrix} \bar{p}(0,0) & \bar{p}(0,1) & \bar{p}_v(0,0) & \bar{p}_v(0,1) \\ \bar{p}(1,0) & \bar{p}(1,1) & \bar{p}_v(1,0) & \bar{p}_v(1,1) \\ \hline \bar{p}_u(0,0) & \bar{p}_u(0,1) & \bar{p}_{uv}(0,0) & \bar{p}_{uv}(0,1) \\ \bar{p}_u(1,0) & \bar{p}_u(1,1) & \bar{p}_{uv}(1,0) & \bar{p}_{uv}(1,1) \end{bmatrix}$$

$$* [H_0(v), H_1(v), \bar{H}_0(v), \bar{H}_1(v)]^T$$

$$u, v \in [0, 1] \quad (1.16)$$

Bem. : Das (TP -) *Ferguson - Patch* erhält man, wenn man von (1.12) nur den 3. Term $\bar{p}_3(u, v)$ verwendet :

$$\begin{aligned} \hat{f}(u, v) &:= U * C * \begin{bmatrix} \bar{p}(1,j) & \bar{p}_v(1,j) \\ \bar{p}_u(1,j) & \bar{p}_{uv}(1,j) \end{bmatrix} * C^T * V \\ &= U * C * P * C^T * V \end{aligned} \quad (1.17)$$

Hierbei ist C die Matrix aus (1.13), U ist die Matrix $[1, u, u^2, u^3]$, V die Matrix $[1, v, v^2, v^3]^T$.

Bem. : Die Einschränkung auf das Intervall $[0, 1]$ ist nicht störend, da ein beliebiges Intervall $[a, b]$ durch die lineare Transformation $t \mapsto (t-a)/(b-a)$, $t \in [a, b]$, auf das Intervall $[0, 1]$ abgebildet werden kann und umgekehrt.

Sind die Parameter $\tilde{u} \in [u_1, u_{1+1}]$ und $\tilde{v} \in [v_j, v_{j+1}]$ gegeben, so wertet man (1.13.) mit den transformierten Parametern $u = (u - u_1)/\Delta u_1$ bzw. $v = (v - v_j)/\Delta v_j$; hierbei ist $\Delta u_1 := u_{1+1} - u_1$, analog Δv_j . Ferner müssen die Untermatrizen der Matrix mit der Eckpunkt-Information aus (1.13.) folgendermaßen transformiert werden :

$$\begin{bmatrix} \bar{p}(1,j) & \Delta v_j * \bar{p}_v(1,j) \\ \hline \Delta u_1 * \bar{p}_u(1,j) & \Delta u_1 * \Delta v_j * \bar{p}_{uv}(1,j) \end{bmatrix} \quad i, j = 0, 1$$

1.5.3. Transformation des TP-Ferguson-Patches in Bezier-Darstellung

Das als ¹⁷(1.17) eingeführte TP - Ferguson - Patch $\hat{f}(u, v) = U C P C^T V$ kann leicht in ein bikubisches TP - Bezier - Patch umgerechnet werden. 17

Das bikubische TP - Bezier - Patch ist gegeben durch

$$\hat{p}(u, v) = \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 \bar{b}_{i,j} * B_i^3(u) * B_j^3(v) \quad u, v \in [0, 1]$$

$$= [1, u, u^2, u^3] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} * \langle \vec{b}_{1,j} \rangle * \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

$$= U M B M^T V$$

Durch Gleichsetzen von $\vec{f}(u, v)$ und $\vec{p}(u, v)$ kann die Matrix P mittels der Bezierpunkte ausgedrückt werden :

$$\langle == \rangle \quad U C P C^T V = U M B M^T V$$

$$P = C^{-1} M B M^T C^T$$

Man findet dann

$$P =$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \vec{b}_{0,0} & \vec{b}_{0,3} & 3(\vec{b}_{0,1} - \vec{b}_{0,0}) & 3(\vec{b}_{0,3} - \vec{b}_{0,2}) \\ \vec{b}_{3,0} & \vec{b}_{3,3} & 3(\vec{b}_{3,1} - \vec{b}_{3,0}) & 3(\vec{b}_{3,3} - \vec{b}_{3,2}) \\ \hline 3(\vec{b}_{1,0} - \vec{b}_{0,0}) & 3(\vec{b}_{1,3} - \vec{b}_{0,3}) & 9(\vec{b}_{0,0} - \vec{b}_{1,0} - \vec{b}_{0,1} + \vec{b}_{1,1}) & 9(\vec{b}_{0,2} - \vec{b}_{1,2} - \vec{b}_{0,3} + \vec{b}_{1,3}) \\ 3(\vec{b}_{3,0} - \vec{b}_{2,0}) & 3(\vec{b}_{3,3} - \vec{b}_{2,3}) & 9(\vec{b}_{2,0} - \vec{b}_{3,0} - \vec{b}_{2,1} + \vec{b}_{3,1}) & 9(\vec{b}_{2,2} - \vec{b}_{3,2} - \vec{b}_{2,3} + \vec{b}_{3,3}) \end{array} \right]$$

(1.18)

Bei bekannten Bezierpunkten $\vec{b}_{1,j}$ ist es somit möglich, die in (1.15) auftretenden Twists $\vec{p}_{uv}(i, j) - i, j = 0, 1$ - zur Patch-Auswertung nach Coons anzugeben. Umgekehrt kann natürlich auch ein in Ferguson-Darstellung vorliegendes Patch in die TP-Bezier-Darstellung transformiert werden, so daß ein de Casteljau-Schema zur Berechnung heranziehbar ist.

Bem.: Da i.a. die Gleichheit $\vec{p}_{uv}(i, j) = \vec{p}_{vu}(i, j)$ nicht gilt, stößt man auf das sogenannte *Vertauschbarkeitsproblem* dieser Twists. GREGORY bzw. NIELSON haben Möglichkeiten vorgeschlagen, dieser Problematik zu entgehen :

GREGORY ersetzt die Größen $\vec{p}_{uv}(0, 0)$, $\vec{p}_{uv}(0, 1)$,
 $\vec{p}_{uv}(1, 0)$, $\vec{p}_{uv}(1, 1)$ durch

$$\frac{u * \vec{p}_{vu}(0, 0) + v * \vec{p}_{uv}(0, 0)}{u + v}, \quad \frac{-u * \vec{p}_{vu}(0, 1) + (v-1) * \vec{p}_{uv}(0, 1)}{-u + v - 1},$$

$$\frac{(1-u) * \vec{p}_{vu}(1, 0) + v * \vec{p}_{uv}(1, 0)}{1 - u + v}, \quad \frac{(u-1) * \vec{p}_{vu}(1, 1) + (v-1) * \vec{p}_{uv}(1, 1)}{u - 1 + v - 1}.$$

Werden die Twists auf diese Weise ersetzt, so bleibt die gewünschte C^1 -Eigenschaft der resultierenden Fläche unberührt.

NIELSON löst das Vertauschbarkeitsproblem dadurch, daß er die Boole-
sche Summe $\vec{p} := \vec{p}_1 \oplus \vec{p}_2$ abweichend von (1.12) folgendermaßen definiert:

$$\vec{p}_1 \oplus \vec{p}_2 := \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \left(\alpha(u, v) * \vec{p}_1(\vec{p}_2) + \beta(u, v) * \vec{p}_2(\vec{p}_1) \right)$$

Die Funktionen α und β müssen dabei den Bedingungen

$$\alpha(u, v), \beta(u, v) \geq 0, \quad \alpha(u, v) + \beta(u, v) = 1,$$

$$\alpha(i, v) = 1, \quad \alpha(u, j) = 0, \quad \beta(i, v) = 0 \quad \text{und} \quad \beta(u, j) = 1$$

$$- i, j \in \{0, 1\}$$

genügen. Der Twistbereich der Matrix aus (1.16) stellt sich damit fol-
gendermaßen dar :

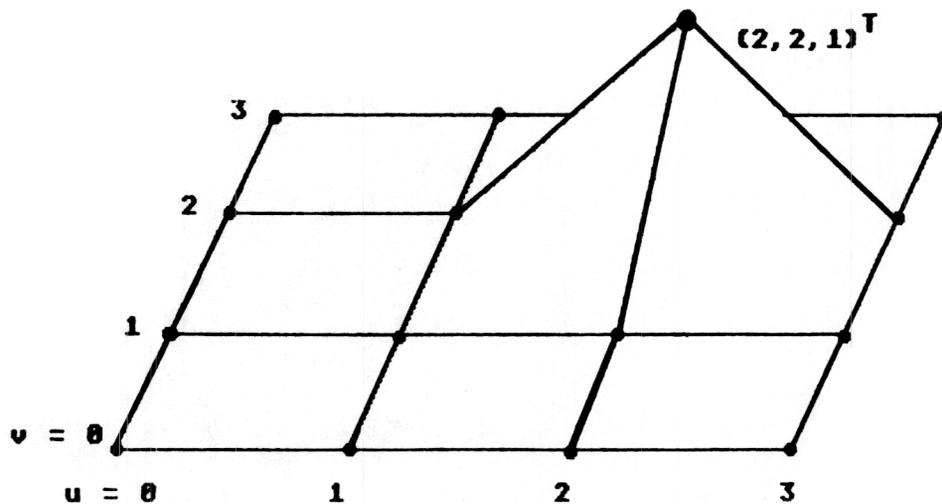
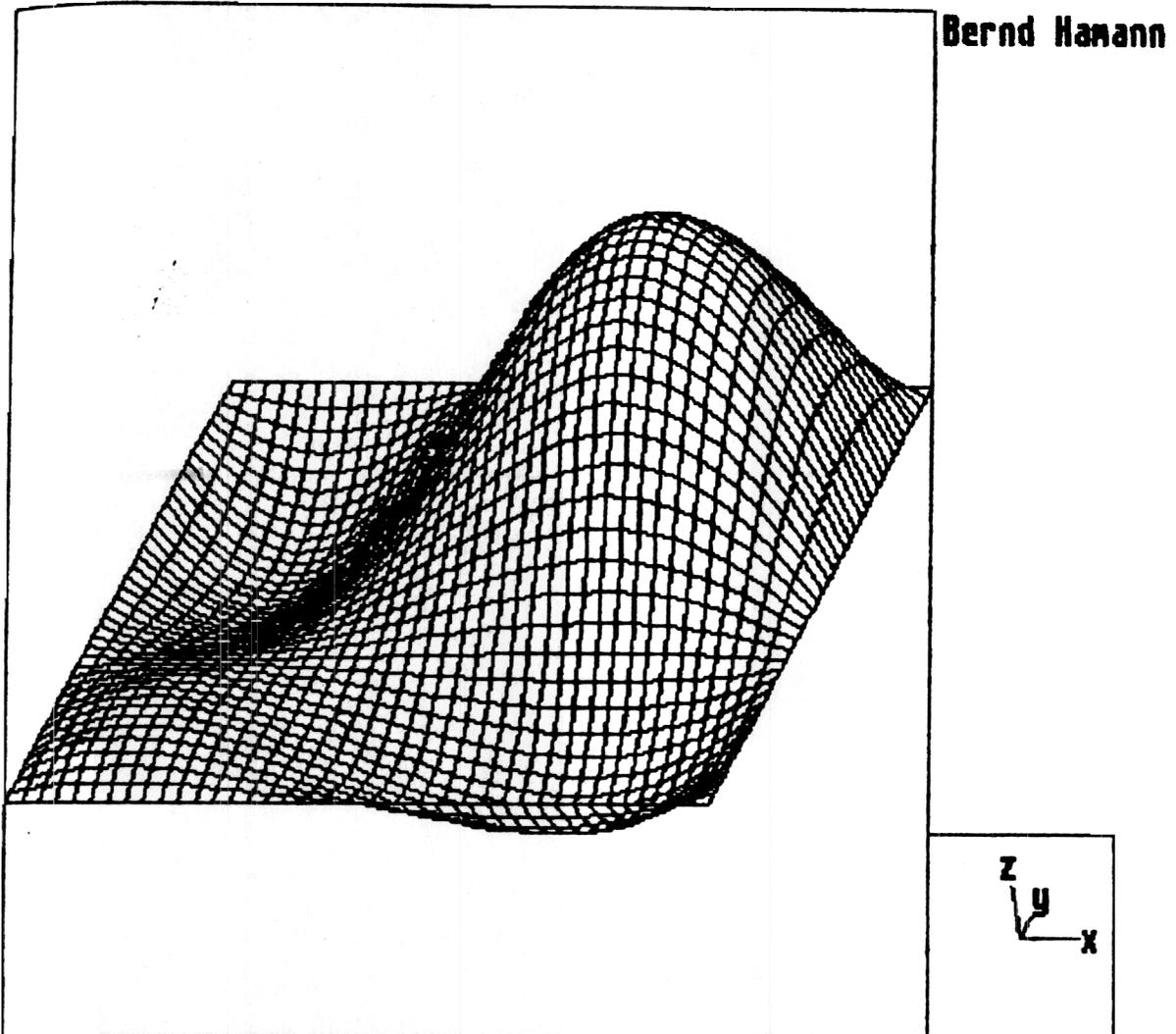
$$\alpha * \vec{p}_{uv}(0, 0) + \beta * \vec{p}_{vu}(0, 0), \quad \alpha * \vec{p}_{uv}(0, 1) + \beta * \vec{p}_{vu}(0, 1)$$

$$\alpha * \vec{p}_{uv}(1, 0) + \beta * \vec{p}_{vu}(1, 0), \quad \alpha * \vec{p}_{uv}(1, 1) + \beta * \vec{p}_{vu}(1, 1)$$

HAGEN hat eine Möglichkeit vorgeschlagen, die Twistvektoren in geeig-
neter Weise vorzugeben; über einen differentialgeometrischen Ansatz wird
der Twist zu einem Knotenpunkt $\vec{p}_{i,j}$ in Abhängigkeit des dort vorge-
fundenen Normalenvektors $\vec{n}_{i,j} := (\vec{p}_{i,j_u} \times \vec{p}_{i,j_v}) / \|\vec{p}_{i,j_u} \times \vec{p}_{i,j_v}\|$ bestimmt.
Hierauf wird in Kapitel 5 ausführlich eingegangen werden.

1. 6. Bilder zu Kapitel 1

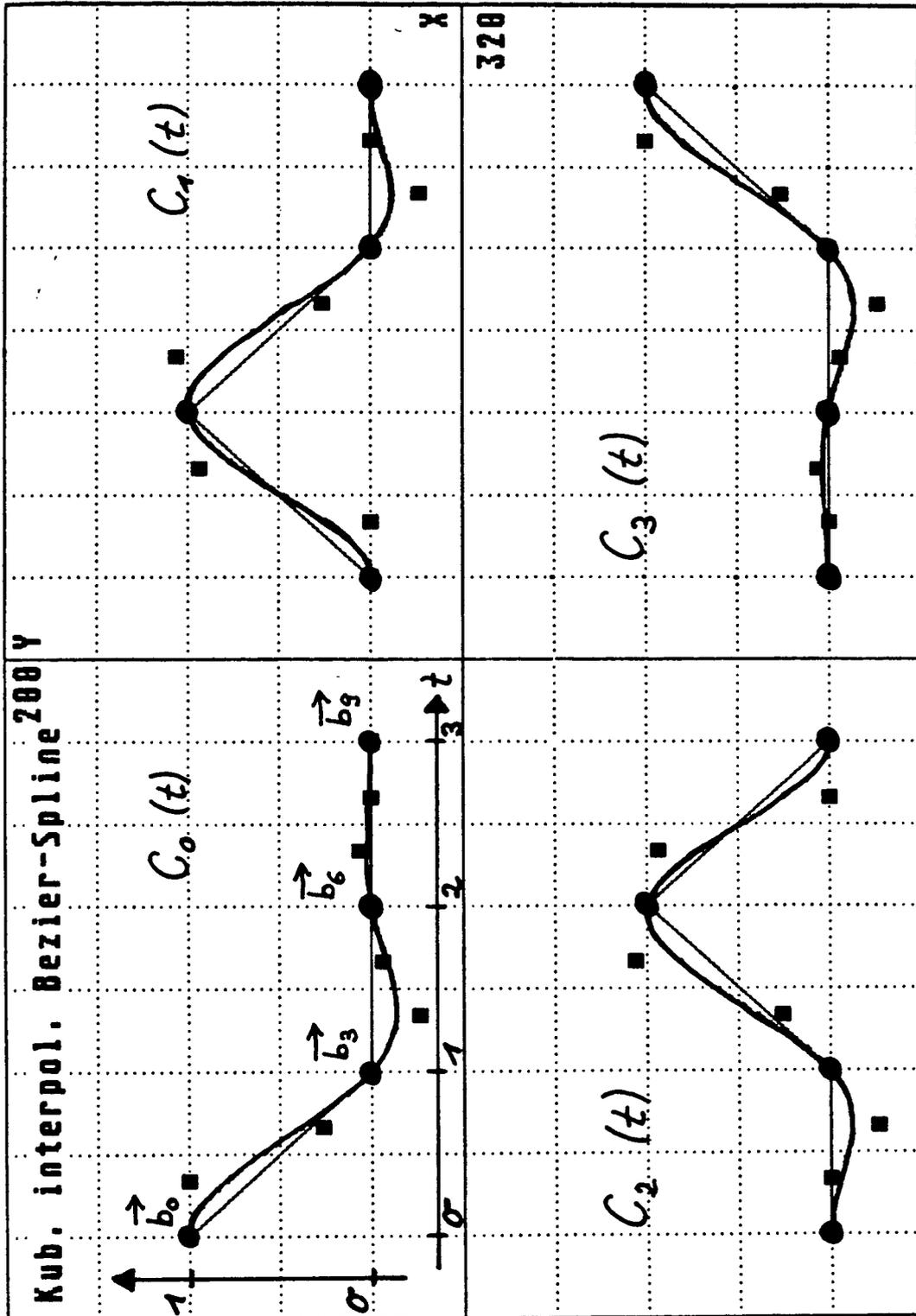
- a) TP - (Kardinal-) Lagrange - Fläche $L_2(u) * L_2(v)$, $u, v \in [0, 3]$
 u -Partition : $\{u_0=0, u_1=1, u_2=2, u_3=3\}$, v -Partition analog
 Bem.: $L_1(x_j) = \delta_{1j}$



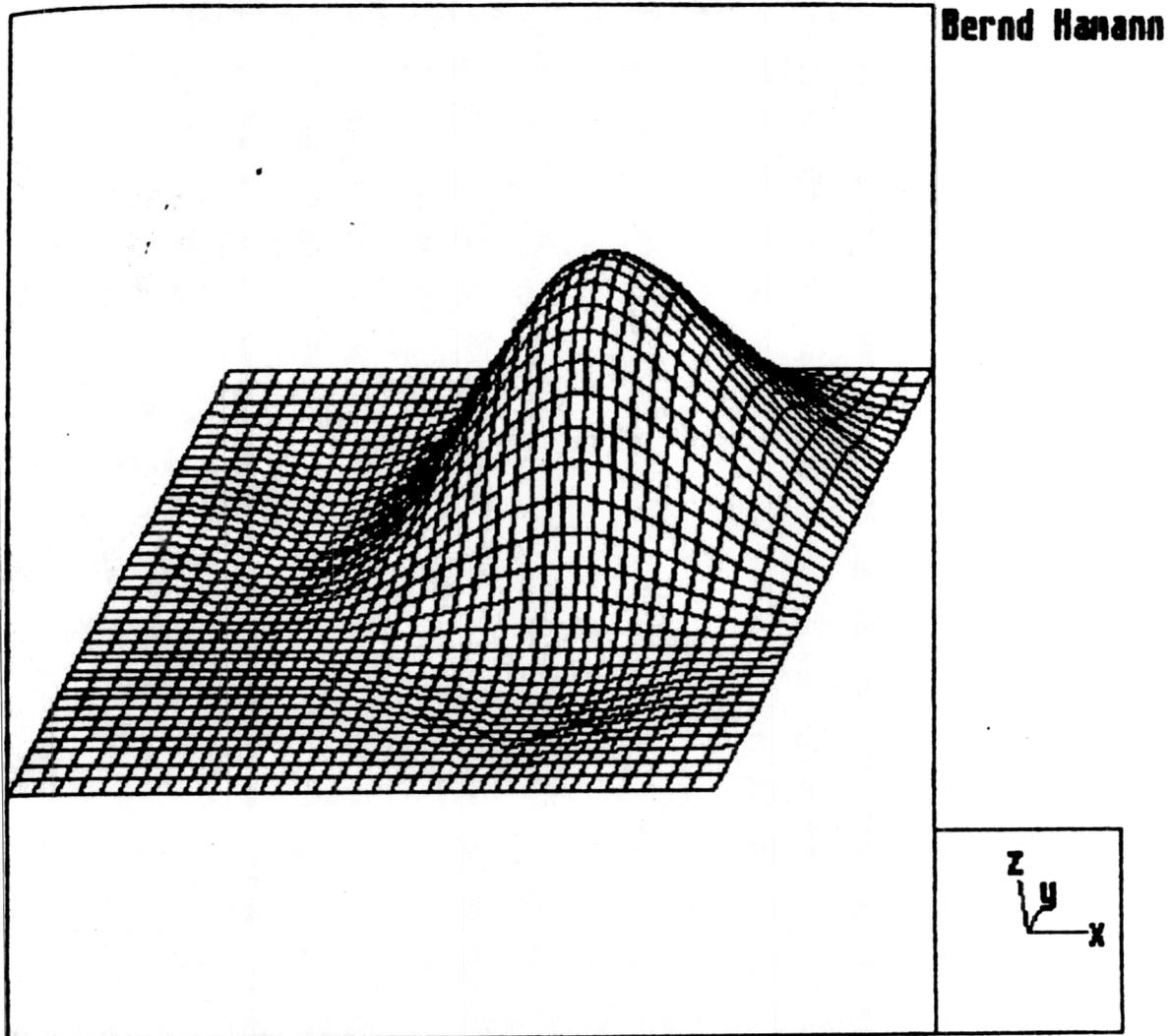
b) Kubische Kardinal-Splines in einer Variablen
(mit zugehörigen Bezierpunkten)

t-Partition : $\{t_0=0, t_1=1, t_2=2, t_3=3\}$

Bem.: $C_i(t_j) = \delta_{ij}$

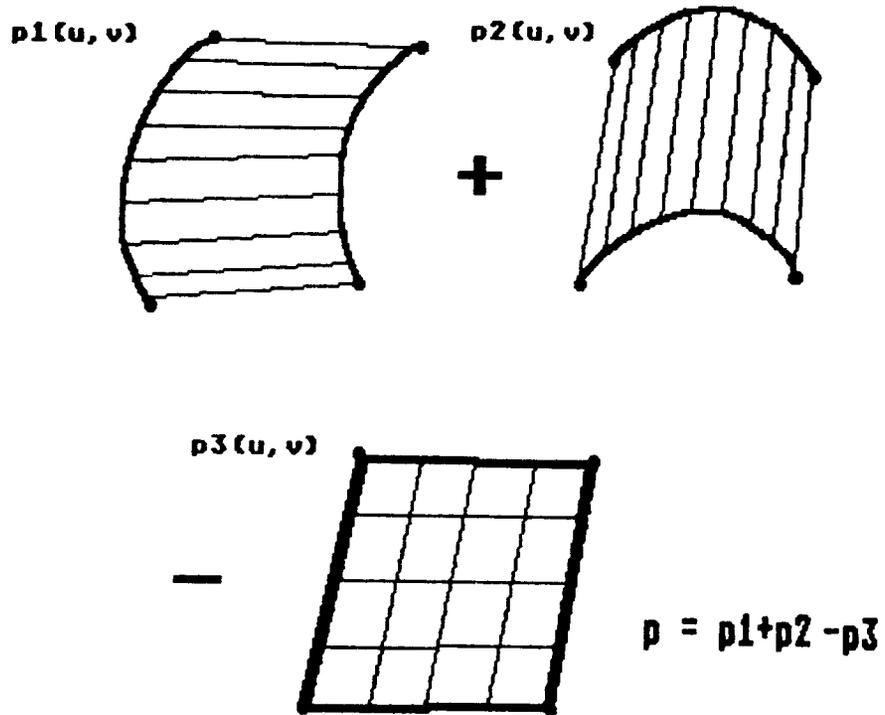


- c) Bikubische C^1 -TP- (Kardinal-) Bezierfläche $C_2(u) * C_2(v)$
alle Daten wie bei Beispiel 1.6. a)

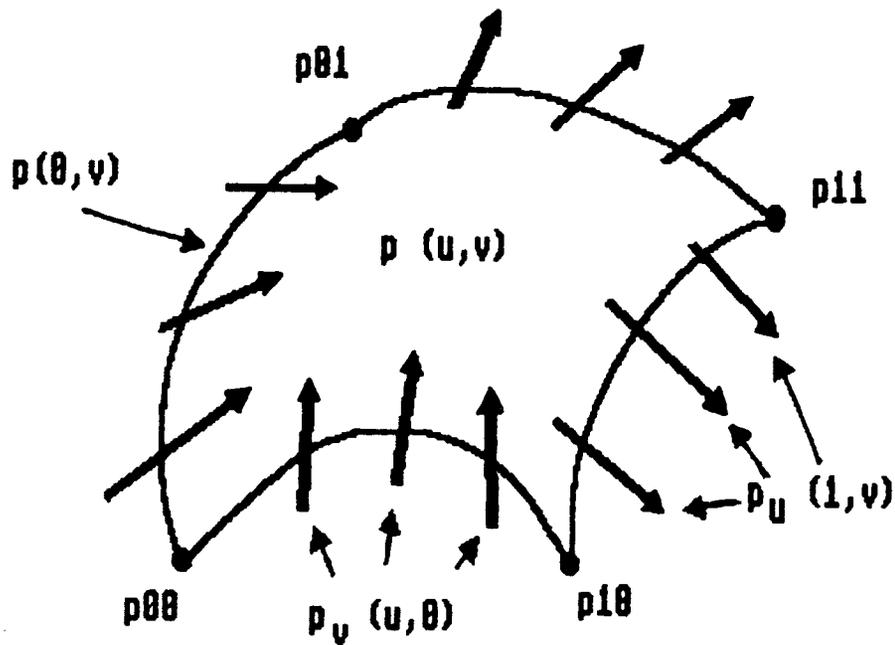


d) Notwendige Information zur Konstruktion eines bilinearen und bikubischen Coons - Patches

Bildung des bilinearen Coons - Patches :



Rand - Information des bikubischen Coons - Patches :



Kapitel 2 : Glättungsverfahren für segmentierte Bezierkurven und TP - Bezierflächen nach SCHELSKE

2. 1. Einleitung

Hans-Joachim SCHELSKE stellt in seiner Dissertation (1984) ein Verfahren vor, lokal (= segmentweise) kubische bzw. quintische Bezierpolynome zu glätten. Ziel dabei ist es, einerseits in einzelnen Segmenten auftretende Wendepunkte zu beseitigen (\Rightarrow "glatt"), andererseits die C^1 - / C^2 - Übergänge an den Segmentgrenzen der kubischen / quintischen Bezier-Subsplines zu erhalten. Als geeignetes Verfahren, dies zu erreichen, schlägt SCHELSKE eine Streckung des Parameterintervalls vor, das zu einem Segment mit Wendepunkt gehört.

Außerdem wird aufgezeigt, wie die Methode zur Glättung von Segmenten einer TP - Bezierfläche herangezogen werden kann.

Die Aufgabenstellung, ein Segment zu glätten, teilt sich somit in folgende Schritte auf :

- (i) Detektion der Segmente, die Wendepunkte enthalten
- (ii) Prüfen, ob die Randbedingungen eines Segmentes mit Wendepunkt die Entfernung desselben erlauben
- (iii) Bei Erfüllbarkeit von (ii) Streckung des zum Segment gehörigen Parameterintervalls mit einem "geeigneten" Streckfaktor

2. 2. Zerlegung von Bezierpolynomen / Parameterintervall - Streckung

Bem. : Alles im Folgenden Gesagte bezieht sich zunächst auf Bezierkurven im \mathbb{R}^2 , d.h. ebene Bezierpolynome. Eine Übertragung auf Kurven im \mathbb{R}^3 ist nur dann ohne weiteres möglich, wenn auch dort das Bezierpolynom vollständig in einer Ebene verläuft.

2. 2. 1. Zerlegung von Bezierpolynomen

Soll ein Bezierpolynom $\vec{b}(t)$ n-ten Grades mit Bezierpunkten $\vec{b}_0, \dots, \vec{b}_n$ definiert auf dem Intervall $[a, b]$ an der Stelle $c \in [a, b]$ in $2 C^k$ - stetig zusammengesetzte Bezierpolynome $\vec{b}^I(t)$ und $\vec{b}^{II}(t)$ jeweils n-ten Grades zerlegt werden, so gilt :

- (i) $\vec{b}^I(t)$ ist definiert auf $[a, c]$,
- (ii) $\vec{b}^{II}(t)$ ist definiert auf $[c, b]$,
- (iii) die jeweiligen (n+1) Bezierpunkte fallen beiläufig bei Auswertung des ursprünglichen Polynoms $\vec{b}(t)$ für die Stelle c an, wenn das de Casteljau - Schema (1. 10), Kapitel 1, S.9, angewendet wird :
 $\vec{b}_{0,0}, \vec{b}_{1,1}, \vec{b}_{2,2}, \dots, \vec{b}_{n,n}$ sind die Bezierpunkte von $\vec{b}^I(t)$,
 $\vec{b}_{n,n}, \vec{b}_{n,n-1}, \vec{b}_{n,n-2}, \dots, \vec{b}_{n,0}$ sind die Bezierpunkte von $\vec{b}^{II}(t)$.

2. 2. 2. Streckung des Parameterintervalls

Im Folgenden soll erörtert werden, wie die Bezierpunkte eines vorgegebenen Bezierpolynoms zu transformieren sind, um bei einer Streckung des zugehörigen Parameterintervalls mit einem *Streckfaktor* $x \in (0, 1]$ eine bestimmte Anzahl zu erhaltender Ableitungen an den Rändern beizubehalten. Schelskes Verfahren zur Glättung einzelner Kurvenssegmente benutzt eine solche Streckung zur Elimination von Wendepunkten. Festzustellen ist an dieser Stelle, daß infolge der *Invarianz* der geometrischen Eigenschaften eines Bezierpolynoms bei einer Parameterintervall-Streckung diese erhalten bleiben, d.h., Tangenten und Krümmungen verändern sich nicht. Lediglich die Länge z.B. eines Tangentenvektors wird beeinflusst. Um aber analytische C^k -Übergänge an Segment-Trennstellen zu erhalten, müssen bei einer Parameterintervall-Streckung auch die Längen der Ableitungsvektoren fest bleiben, was die Transformation der gegebenen Bezierpunkte nötig macht.

Wird ein Parameterintervall $[a, b]$ mit dem Faktor $x := (b' - a) / (b - a)$ ($b' \in (a, b] \implies x \in (0, 1]!$) gestreckt, so muß eine bestimmte Anzahl an Bezierpunkten am linken und rechten Rand des zugehörigen Segmentes transformiert werden, um eine gewünschte C^k -Stetigkeit zu den Nachbarsegmenten beizubehalten.

Sei $\vec{b}(t)$ ein Bezierpolynom n -ten Grades mit zugehörigen Bezierpunkten \vec{b}_0 bis \vec{b}_n , wobei $n \geq 2k + 1$; dann bewirkt folgende Transformation in Abhängigkeit vom verwendeten Streckfaktor x einen Erhalt der ersten k Ableitungen auf den Rändern ("'" steht im Folgenden für die Eigenschaft "transformiert" und nicht für eine Ableitung!):

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \vec{b}_j'(x) &:= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} * \vec{b}_i * (1-x)^{j-i} * x^i \\
 \text{(ii)} \quad \vec{b}_{n-j}'(x) &:= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} * \vec{b}_{n-i} * (1-x)^{j-i} * x^i, \\
 &0 \leq j \leq k. \qquad (2.1)
 \end{aligned}$$

Zum Beweis ist lediglich die Gleichheit der ersten k Ableitungen auf den beiden Rändern des alten und des transformierten Bezierpolynoms zu zeigen:

$$\frac{d^p \vec{b}'(t')}{(dt')^p} = \frac{d^p \vec{b}(t)}{dt^p} \quad \begin{array}{ll} p = 0 \dots k & \text{und} \\ t = a \text{ und } t' = a & \text{bzw.} \\ t = b \text{ und } t' = b'. & \end{array}$$

Setzt man die entsprechenden Terme für die Ableitungen eines Bezierpolynoms ein, so findet man, daß die Gleichheit beider Ausdrücke erfüllt ist.

Bem.: Es fällt auf, daß $\vec{b}_j'(x)$ bzw. $\vec{b}_{n-j}'(x)$ ihrerseits Bezierpolynome in der Variablen x mit jeweils $(j+1)$ Bezierpunkten sind.

Es soll nun diskutiert werden, welchen Einfluß die oben beschriebene Transformation der Bezierpunkte auf die Kurvengestalt hat. Da bei Ausführung der Transformation die Randableitungen bis zu einem bestimmten vorgeschriebenen Grad erhalten bleiben sollen, verändern sich auch Randtangente und Randkrümmungen nicht (Voraussetzung : mindestens C^2 - Erhalt gefordert) .

Hier ist vor allem das Verhalten der Funktionen $\vec{b}_j(x)$ bzw. $\vec{b}_{n-j}(x)$ von Interesse, d.h., wie verhalten sich die Bezierpolynome $\vec{b}_j(x)$ bzw. $\vec{b}_{n-j}(x)$ für Streckfaktoren, die sich im Intervall $(0, 1]$ von 1 nach 0 bewegen.

- (i) $\vec{b}_0(x) = \vec{b}_0$ und $\vec{b}_n(x) = \vec{b}_n$ bleiben erhalten .
- (ii) $\vec{b}_1(x)$ und $\vec{b}_{n-1}(x)$ sind Bezierpolynome vom Grad 1, d.h., $\vec{b}_1(x)$ bewegt sich für x von 1 gegen 0 auf der Geraden durch \vec{b}_1 und \vec{b}_0 von \vec{b}_1 in Richtung \vec{b}_0 und $\vec{b}_{n-1}(x)$ auf der Geraden durch \vec{b}_{n-1} und \vec{b}_n von \vec{b}_{n-1} in Richtung \vec{b}_n .
- (iii) $\vec{b}_2(x)$ und $\vec{b}_{n-2}(x)$ sind Bezierpolynome vom Grad 2, d.h., $\vec{b}_2(x)$ variiert auf der Parabel mit den Bezierpunkten \vec{b}_0, \vec{b}_1 und \vec{b}_2 und entsprechend $\vec{b}_{n-2}(x)$ auf der Parabel mit den Bezierpunkten $\vec{b}_{n-2}, \vec{b}_{n-1}$ und \vec{b}_n .
- (iv) Im Fall, daß $n = 2k + 1$, d.h., ein Bezierpolynom n -ten Grades ist unter Erhalt seiner ersten beiden Randableitungen zu transformieren, werden *alle* alten Bezierpunkte transformiert ; die erste Hälfte der Bezierpunkte - \vec{b}_0 bis \vec{b}_k - strebt für gegen 0 strebendes x gegen \vec{b}_0 , die zweite Hälfte - \vec{b}_{n-k} bis \vec{b}_n - gegen \vec{b}_n .
Je näher x an 0 liegt, desto mehr nimmt das transformierte Bezierpolynom also die "Form" der Geraden durch \vec{b}_0 und \vec{b}_n an .

2. 4. Wendepunkte in Beziersubsplines und deren Beseitigung

Ziel soll es im Folgenden sein, Möglichkeiten zu finden, die Auskunft darüber geben, ob ein Beziersegment mit Wendepunkten behaftet ist oder nicht, Bedingungen aufzustellen, denen Randtangente und Randkrümmungen eines Segmentes genügen müssen, damit evtl. vorkommende Wendepunkte überhaupt beseitigt werden können und Berechnungsarten eines geeigneten Streckungsfaktors x zu nennen, der Wendepunkte verschwinden läßt.

Da einerseits alle Wendepunkte beseitigt werden sollen, andererseits ein Beziersegment nur *minimal korrigiert* werden soll, besteht das Problem darin, einen *maximalen Streckungsfaktor* aus $(0, 1]$ zu bestimmen.

Erkennung von Wendepunkten, notwendige und hinreichende Bedingungen zu deren Beseitigung

Gegeben seien $m+1$ zu interpolierende ebene Punkte \vec{p}_0 bis \vec{p}_m ; jedem Punkt wird entsprechend den euklidischen Abständen der Punkte ein Parameterwert t_i zugeordnet. Die gegebene Punktfolge soll nun von einem m -teiligen Bezier-spline vom Grad n interpoliert werden. Die einzelnen Kurvensegmente mögen mit $\vec{b}^i(t)$ bezeichnet werden und über $[t_i, t_{i+1}]$ parametrisiert sein.

Der gegebene Polygonzug durch $\vec{p}_0, \dots, \vec{p}_m$ kann in ausschließlich konkave bzw. konvexe Teilpolygone maximaler Eckenzahl zerlegt werden. Ist $\vec{p}_r, \dots, \vec{p}_s$ ein konkaver (konvexer) Teilpolygonzug maximaler Eckenzahl, so muß der Interpolierende Beziersub spline zwischen \vec{p}_{r+1} und \vec{p}_{s-1} ebenfalls konkav (konvex) und damit wendepunktfrei sein.

Gehört eine Polygonkante zugleich zu einem konkaven und konvexen Teilpolygon, so muß daß zugehörige Beziersegment $\vec{b}^1(t)$ hier einen Wendepunkt aufweisen. Die mathematische Charakterisierung "konkav" / "konvex" kann z.B. durch folgenden Formalismus ausgeführt werden :

- (i) seien $\vec{d}_i := \vec{p}_{i+1} - \vec{p}_i, i = 0 \dots m-1$, die Verbindungsvektoren je 2 gegebener Punkte ;
- (ii) seien $\vec{d}_i^* = [-d_i^y, d_i^x]$, $i = 0 \dots m-1$, die zu \vec{d}_i senkrecht stehenden Vektoren, wenn $\vec{d}_i = [d_i^x, d_i^y]$ (das Skalarprodukt $\langle \vec{d}_i, \vec{d}_i^* \rangle$ ist 0 !) ;
- (iii) der Polygonzug $\vec{p}_i, \vec{p}_{i+1}, \vec{p}_{i+2}$ ist
 - konvex $\Leftrightarrow \langle \vec{d}_i^*, \vec{d}_{i+1} \rangle > 0$,
 - gerade $\Leftrightarrow \langle \vec{d}_i^*, \vec{d}_{i+1} \rangle = 0$,
 - konkav $\Leftrightarrow \langle \vec{d}_i^*, \vec{d}_{i+1} \rangle < 0$.

Es soll nun untersucht werden, welchen Bedingungen Randtangente und Randkrümmungen eines Beziersegmentes genügen müssen, um überhaupt wendepunktfreie Interpolation zuzulassen.

(I) Bedingungen an die Randkrümmungen

Ein Beziersegment kann nur dann wendepunktfrei sein, wenn die beiden Randkrümmungen gleiches Vorzeichen haben oder wenigstens eine von beiden 0 ist. Es gilt :

$$k(t_1) = \frac{\dot{x}(t_1) \cdot \ddot{y}(t_1) - \ddot{x}(t_1) \cdot \dot{y}(t_1)}{(\dot{x}^2(t_1) + \dot{y}^2(t_1))^{3/2}} \quad , \quad \text{analog für } k(t_{i+1}) \quad (2.3)$$

Im Fall des vektorwertigen Bezierpolynoms $\vec{b}^1(t)$ sind zur Berechnung von $k(t_1)$ und $k(t_{i+1})$ natürlich die beiden Koordinaten-Bezierpolynome $x^1(t_1)$ und $y^1(t_1)$ bzw. $x^1(t_{i+1})$ und $y^1(t_{i+1})$ zu verwenden.

Geschrieben als Bedingung an die ersten drei und letzten drei Bezierpunkte eines Segmentes gilt dann :

$$\begin{aligned} \text{Segment } i \text{ kann nur dann wendepunktfrei sein, wenn das Polygon} \\ \vec{b}_0, \vec{b}_1, \vec{b}_2 \quad \text{konkav (konvex) oder gerade ist} \\ \text{und} \quad \vec{b}_{n-2}, \vec{b}_{n-1}, \vec{b}_n \quad \text{konkav (konvex) oder gerade ist} \end{aligned}$$

$$(\text{logisches "und" und "oder" !}) \quad (2.4)$$

II Bedingungen an die Randtangente

Da die Randtangente eines Bezierpolynoms gegeben sind durch die Vektoren $(\vec{b}_1 - \vec{b}_0)$ bzw. $(\vec{b}_n - \vec{b}_{n-1})$, müssen entweder \vec{b}_1 und \vec{b}_{n-1} beide links der Geraden durch \vec{b}_0 und \vec{b}_n liegen oder aber rechts davon ; als dritte Möglichkeit

kommt noch die Kollinearität dieser vier Bezierpunkte in Betracht. Nur, wenn eine dieser drei Situationen erfüllt ist, können Wendepunkte eines Segmentes beseitigt werden. Die Bedingung an die Tangenten lautet also :

Segment i kann nur dann wendepunktfrei sein, wenn die Polygone $\vec{b}_0, \vec{b}_1, \vec{b}_n$ und $\vec{b}_0, \vec{b}_{n-1}, \vec{b}_n$ konkav (konvex) sind
oder $\vec{b}_0, \vec{b}_1, \vec{b}_{n-1}$ und \vec{b}_n auf einer Geraden liegen.

logisches "und" und "oder") (2. 5)

Für die beiden gebräuchlichsten Fälle C^1 - stetiger kubischer und C^2 - stetiger quintischer Bezierversubsplines sollen jetzt die hier vorgestellten notwendigen Bedingungen für Wendepunktfreiheit herangezogen werden, um Auskunft darüber zu erhalten, ob Segmente überhaupt geglättet werden können oder nicht; für den C^2 - stetigen quintischen Bezierversubpline wird ein hinreichendes Kriterium zur Glättung erörtert werden.

Sind die notwendigen Bedingungen (2.4) und (2.5) für ein Segment mit Wendepunkt erfüllt, wird ein *optimaler Streckungsfaktor* zu bestimmen sein, der einen Wendepunkt "gerade verschwinden" läßt (minimale Korrektur !) .

2. 5. Glättung eines C^1 - stetigen kubischen Bezierversubsplines

Gegeben (i) je 4 Bezierpunkte pro Beziersegment
(ii) Parameterzuordnung $[t_1, t_{i+1}]$ für jedes Paar \vec{p}_1, \vec{p}_{i+1} zu interpolierender Punkte

Kriterium : *Notwendig und hinreichend* für die Wendepunktfreiheit eines kubischen Beziersegmentes ist die *vollständige Konkavität (Konvexität)* des zugehörigen Bezierpolygons

Algorithmus zur Beseitigung von Wendepunkten in kubischen Beziersegmenten

- (i) Suchen aller Segmente, deren Bezierpolygon nicht vollständig konkav (konvex) ist
- (ii) Suchen aller unter (i) bestimmten Segmente mit Wendepunkt, die die Bedingungen (2.4) und (2.5) erfüllen (nur diese kann man glätten !)
- (iii) Bestimmung des optimalen Streckungsfaktors für alle unter (ii) gefundenen Segmente

Idee : Man versucht, entweder $\vec{b}_0, \vec{b}_1, \text{ und } \vec{b}_2$ oder aber \vec{b}_1, \vec{b}_2 und \vec{b}_3 auf eine Gerade zu legen ; dazu wird zunächst der Schnittpunkt der beiden Geraden durch \vec{b}_0 und \vec{b}_1 respektive durch \vec{b}_2 und \vec{b}_3 bestimmt und anschließend ermittelt, welche beiden Streckfaktoren nötig sind, um entweder die ersten drei oder letzten drei Bezierpunkte kollinear zu machen.

Bei diesem Vorgehen stößt man auf folgende Terme :

$$x_1 = \frac{\langle \vec{d}_0^*, \vec{d}_3 \rangle}{\langle \vec{d}_0^*, \vec{d}_2 \rangle} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{\langle \vec{d}_2^*, \vec{d}_3 \rangle}{\langle \vec{d}_2^*, \vec{d}_0 \rangle}$$

$$\text{wobei } \vec{d}_3 = \vec{b}_3 - \vec{b}_0 \text{ und } \vec{d}_i = \vec{b}_{i+1} - \vec{b}_i, \quad i = 0, 1, 2 \\ \text{und } \vec{d}_i^* = (-b, a)^T, \text{ wenn } \vec{d}_i = (a, b)$$

Als Streckfaktor wird der x -Wert verwendet, der aus $(0, 1]$ ist; dies ist $\min \{ x_1, x_2 \}$.

- (iv) Ausführung der Transformation der Bezierpunkte \vec{b}_1 und \vec{b}_2 mit dem unter (iii) bestimmten Faktor x
- (v) Verschiebung aller Parameterwerte $t_j, j = i+1 \dots m$, um die Größe $(1-x) * (t_{i+1} - t_i)$, d.h., $t_j' = t_j - (1-x) * (t_{i+1} - t_i)$, $j = i+1 \dots m$

Beispiel : Ein nach Ausführung von Schritt (i) und (ii) zu transformierendes kubisches Bezierpolygon sei gegeben durch die 4 Bezierpunkte

$$\vec{b}_0 = (0, 0)^T, \quad \vec{b}_1 = (1, 1)^T, \quad \vec{b}_2 = (2, 4)^T \text{ und } \vec{b}_3 = (3, 0)^T$$

Zu bestimmen sind der Streckungsfaktor x und die transformierten Bezierpunkte \vec{b}_1' und \vec{b}_2' (Schritt (iii) und (iv) des Algorithmus).

Schritt (iii) :

$$\vec{d}_0 = (1, 1)^T, \quad \vec{d}_1 = (1, 3)^T, \quad \vec{d}_2 = (1, -4)^T, \quad \vec{d}_3 = (3, 0)^T$$

$$\vec{d}_0^* = (-1, 1)^T, \quad \vec{d}_2^* = (4, 1)^T$$

$$\Rightarrow x_1 = \langle \vec{d}_0^*, \vec{d}_3 \rangle / \langle \vec{d}_0^*, \vec{d}_2 \rangle = (-3) / (-5) = 3/5$$

$$x_2 = \langle \vec{d}_2^*, \vec{d}_3 \rangle / \langle \vec{d}_2^*, \vec{d}_0 \rangle = 12/5$$

$$\Rightarrow x = 3/5$$

Schritt (iv) :

$$\vec{b}_1'(3/5) = 3/5 * \vec{b}_1 + (1-3/5) * \vec{b}_0 = (3/5, 3/5)^T,$$

$$\vec{b}_2'(3/5) = 3/5 * \vec{b}_2 + (1-3/5) * \vec{b}_3 = (12/5, 12/5)^T$$

Damit liegen die ersten drei Bezierpunkte auf der Ursprungsgeraden !

Bem. : mit einem Streckfaktor > 1 entstehen unerwünschte Schleifen !

2. 6. Glättung eines C^2 - stetigen quintischen Bezierversplines

- Gegeben: (i) m quintische Bezierpolynome zum quintischen Bezierverspline mit $m+1$ zu interpolierenden Punkten und die jeweiligen 6 Bezierpunkte
(ii) Parameterzuordnung t_i zu jedem zu interpolierenden Punkt \vec{p}_i
(iii) Richtungen und Beträge der Randableitungen und Randkrümmungen über die ersten bzw. letzten drei bekannten Bezierpunkte je Segment

Kriterien: *Hinreichend aber nicht notwendig* für die Wendepunktfreiheit eines quintischen Beziersegmentes ist die *vollständige Konkavität (Konvexität)* des zugehörigen Bezierpolygons; *hinreichend und notwendig* für diese Eigenschaft ist, daß die *Krümmung* $k(t)$, $t \in [t_1, t_{1+1}]$, für alle t gleiches Vorzeichen hat ($k(t) \leq (\geq) 0 \forall t \in [t_1, t_{1+1}]$).

Bem Im Folgenden wird davon ausgegangen, daß die notwendigen Randbedingungen, ein quintisches Beziersegment überhaupt wendepunktfrei zu machen, erfüllt sind, d.h.,

- (i) Polygon $\vec{b}_0, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ konkav (konvex) oder gerade *und*
- (ii) Polygon $\vec{b}_3, \vec{b}_4, \vec{b}_5$ konkav (konvex) oder gerade *und*
- (iii) Polygon $\vec{b}_0, \vec{b}_1, \vec{b}_5$ konkav (konvex) *und*
- (iv) Polygon $\vec{b}_0, \vec{b}_4, \vec{b}_5$ konkav (konvex) *oder*
- (v) alle diese 4 Teilpolygone gerade.

(i), (ii) Krümmungsbedingungen, (iii), (iv) Tangentenbedingungen)

2. 6. 1. Fall 1: Konkavität (Konvexität) des Bezierpolygons als hinreichendes Kriterium für Wendepunktfreiheit

Soll die vollständige Konkavität (Konvexität) des Bezierpolygons erreicht werden, muß der maximale Streckungsfaktor aus $(0, 1]$ bestimmt werden, für den dies erreicht wird.

Analog zum kubischen Fall, bei dem entweder die ersten oder aber letzten drei Bezierpunkte kollinear gemacht werden, um einen Wendepunkt zu entfernen, müssen im quintischen Fall entweder die Bezierpunkte \vec{b}_1, \vec{b}_2 und \vec{b}_3 oder aber \vec{b}_2, \vec{b}_3 und \vec{b}_4 auf eine Gerade gelegt werden. Um diese beiden Kollinearitäten zu erzielen, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein, deren Lösung zwei potentielle Streckfaktoren ergibt. Der kleinere der beiden Lösungen x_1 und x_2 stellt dabei den maximalen Streckungsfaktor aus $(0, 1]$ dar.

Die beiden zu lösenden Gleichungen lauten (dies sind die Gleichungen, die von den später transformierten Bezierpunkten zu erfüllen sind!):

- (i) $\langle \vec{d}_1^*, \vec{d}_2 \rangle = 0$ bzw.
- (ii) $\langle \vec{d}_2^*, \vec{d}_3 \rangle = 0$

Die in diesen Gleichungen auftretenden Differenzvektoren je zweier mit einem zu bestimmenden Faktor x zu transformierenden Bezierpunkte $\vec{b}_i' := \vec{b}_i(x)$ werden gemäß der Transformationsvorschrift (2.1), 2.2.2., in der Variablen x angesetzt; multipliziert man die sich ergebenden Gleichungen aus, so folgen zwei kubische Gleichungen für x :

$$(i) \quad x^3 \langle (\vec{d}_1 - \vec{d}_0)^*, \vec{d}_4 - \vec{d}_3 \rangle + x^2 \left(\langle \vec{d}_0^*, 3\vec{d}_4 - \vec{d}_3 + \vec{d}_1 \rangle - 2 \langle \vec{d}_1^*, \vec{d}_4 \rangle \right) + x \left(\langle (\vec{d}_1 - \vec{d}_0)^*, \vec{d}_5 \rangle - 2 \langle \vec{d}_0^*, \vec{d}_4 \rangle \right) + \langle \vec{d}_0^*, \vec{d}_5 \rangle = 0$$

bzw.

$$(ii) \quad x^3 \langle (\vec{d}_1 - \vec{d}_0)^*, \vec{d}_4 - \vec{d}_3 \rangle + x^2 \langle -\vec{d}_4^*, -3\vec{d}_0 + \vec{d}_1 - \vec{d}_3 \rangle + 2 \langle \vec{d}_3^*, \vec{d}_0 \rangle \\ + x \langle (\vec{d}_4 - \vec{d}_3)^*, \vec{d}_5 \rangle + 2 \langle \vec{d}_4^*, \vec{d}_0 \rangle - \langle \vec{d}_4^*, \vec{d}_5 \rangle = 0$$

Diese Gleichungen können jetzt numerisch ausgewertet werden; das größte x aus $(0, 1]$ wird als Streckfaktor verwendet.

2. 6. 2. Fall 2 : Doppelnulstelle der Krümmung als notwendige und hinreichende Bedingung für Wendepunktfreiheit

Wird die unter Fall 1 geforderte vollständige Konkavität (Konvexität) des Bezierpolygons als zu streng angesehen, kann ein optimaler Streckungsfaktor im Sinne einer minimalen Korrektur dadurch bestimmt werden, daß die Krümmung für dieses Segment eine Doppelnulstelle erhält (denn : bei der gegebenen Situation liegen im Segment zwei Wendepunkte und damit zwei Nullstellen der Krümmung vor, die *gerade verschwinden* sollen; die Randkrümmungen sind nach Voraussetzung ja gleich !) .

Zu bestimmen ist also ein t_0 aus $[t_1, t_{i+1}]$, für das $k(t_0) = k'(t_0) = 0$ und $k''(t_0) \neq 0$, so daß hier zugleich ein Maximum (Minimum) der Krümmung entsteht. Ist dieser Grenzfall einmal erreicht, ist das Beziersegment wendepunktfrei.

Es muß also gelten : (i) $k(t_0) = 0$ und
(ii) $k'(t_0) = 0$ und
(iii) $k''(t_0) < (>) 0 \implies$ Maximum (Minimum)
der Krümmung $k(t)$

Verwendet man die Formel (2. 3), 2. 4., zur Bestimmung der Krümmung $k(t)$ und deren Ableitung $k'(t)$, so hat man in den sich ergebenden Brüchen lediglich die beiden Zähler 0 zu setzen, um (i) und (ii) zu erfüllen. Beim Nullsetzen der beiden Zähler entstehen die Gleichungen

$$\sum_{k=0}^4 \sum_{l=0}^3 \binom{4}{k} \binom{3}{l} (t_m - t_1)^{k+1} (t_{i+1} - t_m)^{7-k-1} \langle \vec{d}_k^*, \vec{d}_{i+1} - \vec{d}_1 \rangle = 0$$

und

$$\sum_{k=0}^4 \sum_{l=0}^2 \binom{4}{k} \binom{2}{l} (t_m - t_{i+1})^{k+1} (t_1 - t_m)^{6-k-1} \langle \vec{d}_k^*, \vec{d}_{i+2} - 2\vec{d}_{i+1} + \vec{d}_1 \rangle = 0$$

t_m sei hierbei die gesuchte Doppelnulstelle der Krümmung; gesucht ist nun das Tupel (x_{opt}, t_m) , so daß bei Streckung des Segmentes mit dem Faktor x_{opt} in dem dann transformierten Parameterintervall $[t_1, t_{i+1}']$ für $t = t_m$ die gewünschte Doppelnulstelle von $k(t)$ ist.

Numerisches Verfahren zur Bestimmung des Tupels (x_{opt}, t_m)

gegebene Situation : $k(x_0=1, t_1) \geq (\leq) 0$ und
 $k(x_0=1, t_{i+1}) \geq (\leq) 0$, d.h. Randkrümmungen
haben gleiches Vorzeichen

- (o) Index $i := 0$; $x_1 = x_0 := 1$,
- (i) Bestimmung aller Nullstellen t_{0j} von $\partial k(x_1, t) / \partial t$ auf $[t_1, t_{i+1}]$, d.h. Bestimmung aller Stellen t_{0j} , für die $k(x_1, t_{0j})$ ein lokales Extremum besitzt
- (ii) Bestimmung des t_m aus der Menge aller t_{0j} , für das $k(x_1, t_m)$ das Minimum (Maximum) aller $k(x_1, t_{0j})$ ist
- (iii) Ist das Minimum $k(x_1, t_m) \geq (\geq) 0$ bei (v) fortfahren, sonst bei (iv)
- (iv) Bestimmung der maximalen Nullstelle x_{null} von $k(x, t_m)$; $i := i+1$; $x_1 := x_{null} - \Delta x$ ($\Delta x \ll 1!$); bei (i) fortfahren
- (v) Transformieren des Parameterintervalls und der gegebenen Bezierpunkte mit dem Streckungsfaktor $x_{opt} := x_1$.

Bem.: Die Idee dieses Vorgehens besteht darin, x solange von 1 beginnend in Richtung 0 zu bewegen, bis das $x = x_{opt}$ gefunden ist, für das $k(x_{opt}, t_m)$ auf dem ganzen Intervall $[t_1, t_{i+1}]$ größer-gleich (kleiner-gleich) 0 ist.

2. 7. Glättung beliebiger Teile eines ebenen Bezierpolynoms

Ist ein ebenes Bezierpolynom $\vec{b}(t)$ n -ten Grades mit zugehörigem Parameterintervall $[a, b]$ gegeben, das nur auf dem Teilintervall $[t_1, t_2]$ mit der Eigenschaft $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ geglättet werden soll, da nur hier ein Wendepunkt vorliegt, so ist folgende Vorgehensweise erforderlich, um bei Zerlegung des gegebenen Bezierpolynoms an den Zerlegungsstellen t_1 und t_2 C^2 -Stetigkeit zu gewährleisten :

- (i) Zerlegung von $\vec{b}(t)$ an der Stelle t_1 in die Bezierpolynome $\vec{b}^I(t)$ und $\vec{b}^{II}(t)$ jeweils n -ten Grades
- (ii) Zerlegung von $\vec{b}^{II}(t)$ an der Stelle t_2 in die Bezierpolynome $\vec{b}^{III}(t)$ und $\vec{b}^{IV}(t)$ jeweils n -ten Grades
- iii) Berechnung der ersten beiden Ableitungen an den Stellen t_1 und t_2 ; Bestimmung der 6 Bezierpunkte eines quintischen Bezierpolynoms $\vec{b}^V(t)$, das C^2 -stetig an die beiden Bezierpolynome $\vec{b}^I(t)$ und $\vec{b}^{IV}(t)$ anschließt und auf $[t_1, t_2]$ definiert ist
- (iv) Bei erfüllten notwendigen Randbedingungen für Wendepunktfreiheit von $\vec{b}^V(t)$ Streckung des Parameterintervalls $[t_1, t_2]$ mit einem optimalen Streckungsfaktor

2. 8. Übertragung der Verfahren für ebene Bezierpolynome zur Glättung von TP - Bezierflächen

2. 8. 1. Streckung eines TP - Bezierflächensegmentes

Eine TP - Bezierfläche m - n -ten Grades ist gegeben durch

$$\vec{b}(u, v) := \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \vec{b}_{i,j} * B_j^n(v) * B_i^m(u)$$

mit zugehöriger Beziermatrix $B := \langle \vec{b}_{i,j} \rangle$.

2. 6.)

Ist $\vec{b}(u, v)$ eine $C^{p,q}$ -stetige mehrteilige/mehrsegmentige TP-Bezierfläche m - n -ten Grades und soll ein Segment mit Definitionsbereich $[u_1, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ mit den Streckungsfaktoren $x := (u_{i+1}' - u_1) / (u_{i+1} - u_1)$ für den Parameter u und $y := (v_{j+1}' - v_j) / (v_{j+1} - v_j)$ für den Parameter v gestreckt werden, so bleibt zu den sich 4 anschließenden Nachbarsegmenten die vorgegebene $C^{p,q}$ -Stetigkeit erhalten, wenn die Beziermatrix folgendermaßen transformiert wird:

$$B' = \begin{bmatrix} \vec{b}_{0,0}' & \dots & \vec{b}_{0,n}' \\ \dots & & \dots \\ \vec{b}_{m,0}' & \dots & \vec{b}_{m,n}' \end{bmatrix} = T(x) * \begin{bmatrix} \vec{b}_{0,0} & \dots & \vec{b}_{0,n} \\ \dots & & \dots \\ \vec{b}_{m,0} & \dots & \vec{b}_{m,n} \end{bmatrix} * (T(y))^T$$

$$= T(x) * B * (T(y))^T \quad (2.7)$$

Hierbei seien $T(x)$ bzw. $T(y)$ die zu einer Transformationsvorschrift zusammengefaßten Transformations-Matrizen aus (2.1) die hier die Parameterintervallstreckung in u und v beschreiben.

Bem.: Der Aufwand, eine segmentierte TP-Bezierfläche kubischen oder quintischen Grades zu strecken ist beträchtlich; bei einer gleichzeitigen Streckung für die Parameter u und v sind ja all diejenigen Segmente der TP-Fläche zu transformieren, die in u das Intervall $[u_1, u_{i+1}]$ respektive in v das Intervall $[v_j, v_{j+1}]$ miteinander teilen. Soll beispielsweise eine quintische TP-Bezierfläche mit $r*s$ Segmenten in u und v gestreckt werden, so sind insgesamt größenordnungsmäßig die Bezierpunkte von $r*s$ Segmenten mit jeweils 36 Bezierpunkten zu transformieren.

Es ist dazu wie folgt vorzugehen (Verwendung von (2.7)!) :

- (i) Streckung des Segmentes $\text{Seg}_{1,j}$, für das (nach noch zu bestimmenden Kriterien) eine "Beule" entdeckt worden ist, mit den Streckfaktoren x und y
- (ii) Streckung aller Segmente $\text{Seg}_{0,j}, \dots, \text{Seg}_{i-1,j}, \text{Seg}_{i+1,j}, \dots, \text{Seg}_{m-1,j}$ d.h., aller Segmente, die mit dem beulenbehafteten Segment $\text{Seg}_{1,j}$ das gleiche v -Intervall $[v_j, v_{j+1}]$ teilen, mit den Streckfaktoren $x := 1$ und y aus (i)
- (iii) Streckung aller Segmente $\text{Seg}_{1,0}, \dots, \text{Seg}_{1,j-1}, \dots, \text{Seg}_{1,j+1}, \dots, \text{Seg}_{1,n-1}$ d.h., aller Segmente, die mit dem beulenbehafteten Segment $\text{Seg}_{1,j}$ das gleiche u -Intervall $[u_1, u_{i+1}]$ teilen, mit den Streckfaktoren x aus (i) und $y := 1$

2.8.2. Konkavitäts- (Konvexitäts-) Bedingungen für TP-Bezierflächen

Eine Klasse von Flächen, die "beulenfrei" sind, sind die *konkaven (konvexen) Flächen*; hinreichend für die Konkavität (Konvexität) eines einfach zusammenhängenden Flächenstücks der Klasse C^k ist die Forderung nach negativer (positiver) *Gauß-Krümmung* in allen Flächenpunkten $\vec{p}(u, v)$. Die Gauß-Krümmung ist wie folgt definiert:

$$K(\vec{p}(u, v)) := \frac{\langle \vec{n}, \vec{p}_{uu} \rangle * \langle \vec{n}, \vec{p}_{vv} \rangle - \langle \vec{n}, \vec{p}_{uv} \rangle^2}{\langle \vec{p}_u, \vec{p}_u \rangle * \langle \vec{p}_v, \vec{p}_v \rangle - \langle \vec{p}_u, \vec{p}_v \rangle^2} \quad (2.8)$$

Hierbei ist \vec{n} der auf 1 normalisierte Normalenvektor zu $\vec{p}(u, v)$ und \vec{p}_u sind die partiellen Ableitungen $\partial \vec{p}(u, v) / \partial u, \dots$

Bem.: Die Gauß - Krümmung K stellt aus differentialgeometrischer Sicht den Quotienten aus 2. und 1. *Fundamentalform* regulärer Flächen dar.

Es soll nun eine hinreichende Forderung an die Bezierpunkte eines TP-Flächensegmentes angegeben werden, die ein konkaves (konvexes) zugehöriges TP - Beziersegment garantiert. Die Forderung nach negativer (positiver) Gauß - Krümmung in allen Segment-Flächenpunkten stellt sich dann wie folgt dar :

Zum Erhalt positiver Gauß-Krümmung in allen Flächenpunkten eines Segmentes ist notwendig, daß in den 4 Eckpunkten eines Segmentes positive Gauß-Krümmung vorliegt.

Ist ein Segment $\text{Seg}_{1,j}$ mit Parameterintervallen $[u_1, u_{1+1}]$ und $[v_j, v_{j+1}]$ gegeben, so stellt sich diese Bedingung bezogen auf die Ecke $u = u_1$ und $v = v_j$ und bezogen auf die "zu dieser Ecke gehörenden Bezierpunkte" $\vec{b}_{0,0}, \vec{b}_{1,0}, \vec{b}_{2,0}, \vec{b}_{0,1}, \vec{b}_{1,1}$ und $\vec{b}_{2,2}$ so dar :

- (i) $\vec{b}_{2,0}$ und $\vec{b}_{0,2}$ liegen beide unterhalb oder oberhalb der Tangentialebene an $\vec{b}_{0,0}$, d.h., unterhalb oder oberhalb der Ebene durch $\vec{b}_{0,0}, \vec{b}_{1,0}$ und $\vec{b}_{0,1}$ (diese Ebene soll mit "E" abgekürzt werden) .
- (ii) Für die euklidischen Abstände der Punkte $\vec{b}_{2,0}, \vec{b}_{0,2}$ und $\vec{b}_{1,1}$ von der Ebene E muß die Relation

$$\text{dist}(\vec{b}_{1,1}, E) < \sqrt{\frac{(m-1) * (n-1)}{m * n} * \text{dist}(\vec{b}_{2,0}, E) * \text{dist}(\vec{b}_{0,2}, E)}$$

erfüllt sein ; m, n sind dabei die Bezierpolynom-Grade für die Parameter u bzw. v .

Für die übrigen 3 Ecken eines Flächensegmentes sind analoge Bedingungen gültig.

Um die Konvexität eines beliebigen Segment-Flächenpunktes $\vec{p}(u, v)$ mit $u \in [u_1, u_{1+1}]$ und $v \in [v_j, v_{j+1}]$ zu überprüfen, wird das Segment $\text{Seg}_{1,j}$ an der Stelle (u, v) in 4 Teilsegmente mittels des (de Casteljaou -) Zerlegungsverfahrens für TP-Bezierflächen zerlegt ; anschließend wird die unter (i) und (ii) vorgeschlagene Methode herangezogen, um alle 4 in der Ecke (u, v) zusammenlaufenden Teilsegmente hier auf Konvexität zu prüfen.

Hinreichende Bedingung für die Konvexität einer TP - Bezierfläche

Eine TP - Bezierfläche m-n-ten Grades ist konvex, wenn

- (i) alle Bezierpunkte Ecken der konvexen Hülle des Beziernetzes und
- (ii) alle Beziernetz-Seiten $\vec{b}_{1,j}, \vec{b}_{1,j+1}$ und $\vec{b}_{1,j}, \vec{b}_{1+1,j}$ Seiten der konvexen Hülle sind und
- (iii) je 4 Bezierpunkte $\vec{b}_{1,j}, \vec{b}_{1+1,j}, \vec{b}_{1,j+1}$ und $\vec{b}_{1+1,j+1}$ ein Parallelogramm bilden .

2. 8. 3. Glättung mehrteiliger / segmentierter TP - Bezierflächen, speziell $C^{2,2}$ - stetige quintische TP - Bezierflächen

Setzt man eine $C^{2,2}$ -stetige quintische TP-Bezierfläche durch alle Bezierpunkte als gegeben voraus - je Segment $6 * 6$ Bezierpunkte gemäß geeigneter Übergangsbedingungen bestimmt - , so muß sich ein Glättungsalgorithmus prinzipiell in die folgenden drei Schritte aufteilen :

- (i) Bestimmung der Segmente , deren 36 Bezierpunkte das am Ende der letzten Seite vorgestellte hinreichende Kriterium verletzen und
- (ii) Bestimmung "optimaler" Streckungsfaktoren x und y für all die unter (i) bestimmten zu korrigierenden Segmente
- (iii) Ausführung der Bezierpunkt-Transformation mit den unter (ii) bestimmten Faktoren

Die Schwierigkeit der praktischen Ausführung besteht in Punkt (ii)

Welche Streckfaktoren erfüllen einerseits (i) und (ii) des hinreichenden Kriteriums unter 2. 8. 2. und lassen *gleichzeitig (!)* (iii) gelten ?

Im Spezialfall, daß je 6 Bezierpunkte $\vec{b}_{0,1}, \dots, \vec{b}_{5,1}$, $i = 0 \dots 5$, bzw. $\vec{b}_{j,0}, \dots, \vec{b}_{j,5}$, $j = 0 \dots 5$, komplanar liegen, erscheint es sinnvoll, beide 6er Gruppen von Bezierkurven derart mit Streckfaktoren x bzw. y zu strecken , daß beide Gruppen je 6 konvexe ebene Bezierkurven repräsentieren. Ob dabei aber auch die Parallelogramm-Eigenschaft je 4 benachbarter Bezierpunkte erreicht wird oder durch weitere Veränderung der Streckfaktoren x und y herbeigeführt werden kann, ist eine offene Frage.

Aus diesen Gründen scheint hier der beste Weg darin zu bestehen, Segmente mit Beulen interaktiv mit verschiedenen Faktoren zu transformieren und die dabei jeweils entstehenden Segmente mit Verfahren zur Detektion von evtl. immer noch vorhandenen Beulen zu untersuchen und gegebenenfalls weiter zu strecken.

Bem. : Hoschek hat ein Verfahren zur Erkennung von Beulen vorgeschlagen (s. Kapitel 3 !) .

Numerisches Verfahren zur Bestimmung des Tupels $(x_{opt}, y_{opt}, u_m, v_m)$

(In Analogie zum Verfahren zur Bestimmung von (x_{opt}, t_m) unter 2.6.2. ; Schelske selbst hat diese Möglichkeit in seiner Dissertation nicht erwähnt .)

gegebene Situation : Gauß-Krümmung ist in allen 4 Ecken des Patches positiv, $K(u_1, v_1) > 0, \dots, K(u_{j+1}, v_{j+1}) > 0$; das betrachtete Patch besitzt wenigstens 1 Beule, d.h., es gibt Stellen mit $K(u, v) \leq 0$.

- (o) Index $i := 0$; $x_0 = y_0 := 1$ (\Rightarrow gegebene Situation)
- (i) Bestimmung aller lokalen Extrema der Funktion $K(x_1, y_1, u, v)$ auf dem gegebenen Definitionsgebiet des Patches ; hierbei sind x_1, y_1 fest und u und v die eigentlichen Variablen, d.h., man hat die lokalen Extrema einer bivariaten Funktion zu finden.
- (ii) Bestimmung des Tupels (u_m, v_m) aus der Menge aller Tupel (u_{0j}, v_{0j}) , für das $K(x_1, y_1, u_m, v_m)$ das Minimum aller $K(x_1, y_1, u_{0j}, v_{0j})$ ist. Hier wird also das Minimum aller lokalen Extrema der unter (i) angegebenen (eigentlich bivariaten) Funktion K gesucht.
- (iii) Ist das unter (ii) bestimmte Minimum $K(x_1, y_1, u_m, v_m) > 0$, so ist die Gauß-Krümmung des Patches überall positiv und es soll bei (v) fortgefahren werden ;
bei Verletzung dieser Bedingung möge bei (iv) fortgefahren werden.
- (iv) Bestimmung des maximalen Nullstellen-Tupels (x_{null}, y_{null}) der Funktion $K(x, y, u_m, v_m)$, d.h., x und y sind variabel (auf $(0, 1]$) und u und v sind fest; damit ist also die Nullstellensuche einer bivariaten Funktion erforderlich.

Bezeichnung : ein Nullstellen-Tupel (x, y) ist *maximal*, wenn kein Nullstellen-Tupel (x', y') existiert, das einen kleineren euklidischen Abstand vom Tupel $(1, 1)$ hat.

$i := i+1$; $(x_1, y_1) := (x_{null} - \Delta x, y_{null} - \Delta y)$, wobei $\Delta x, \Delta y \ll 1$!
Fortfahren bei (i).

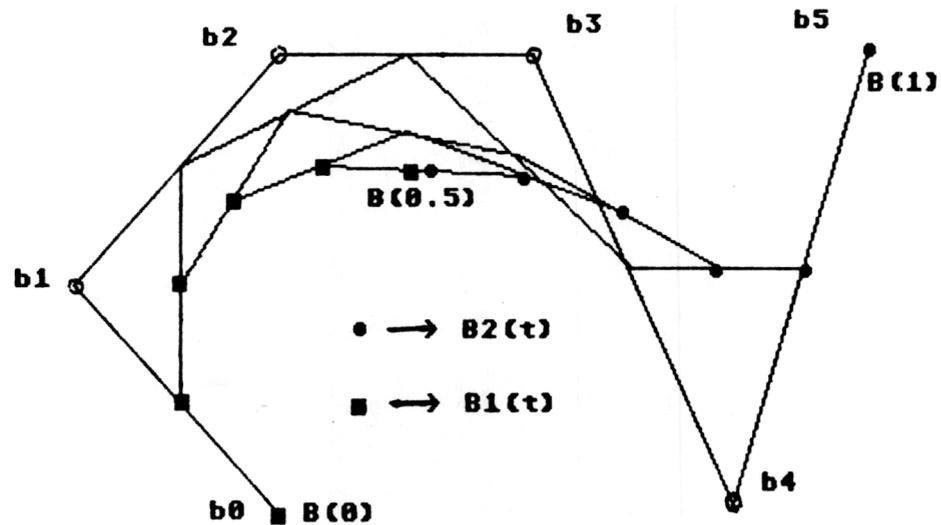
- (v) Transformieren des Parametergebietes und der gegebenen Bezierpunkte mit den beiden Streckungsfaktoren $x_{opt} := x_1$ und $y_{opt} := y_1$.

Bem. : Die Idee dieses Verfahrens besteht darin, x und y von $(1, 1)$ beginnend "in Richtung $(0, 0)$ " zu bewegen, bis das maximale Tupel $(x=x_{opt}, y=y_{opt})$ gefunden ist, für das $K(x_{opt}, y_{opt}, u_m, v_m)$ auf dem ganzen Definitionsgebiet $[u_1, u_{i+1}] \times [v_1, v_{j+1}]$ größer (!) 0 ist.

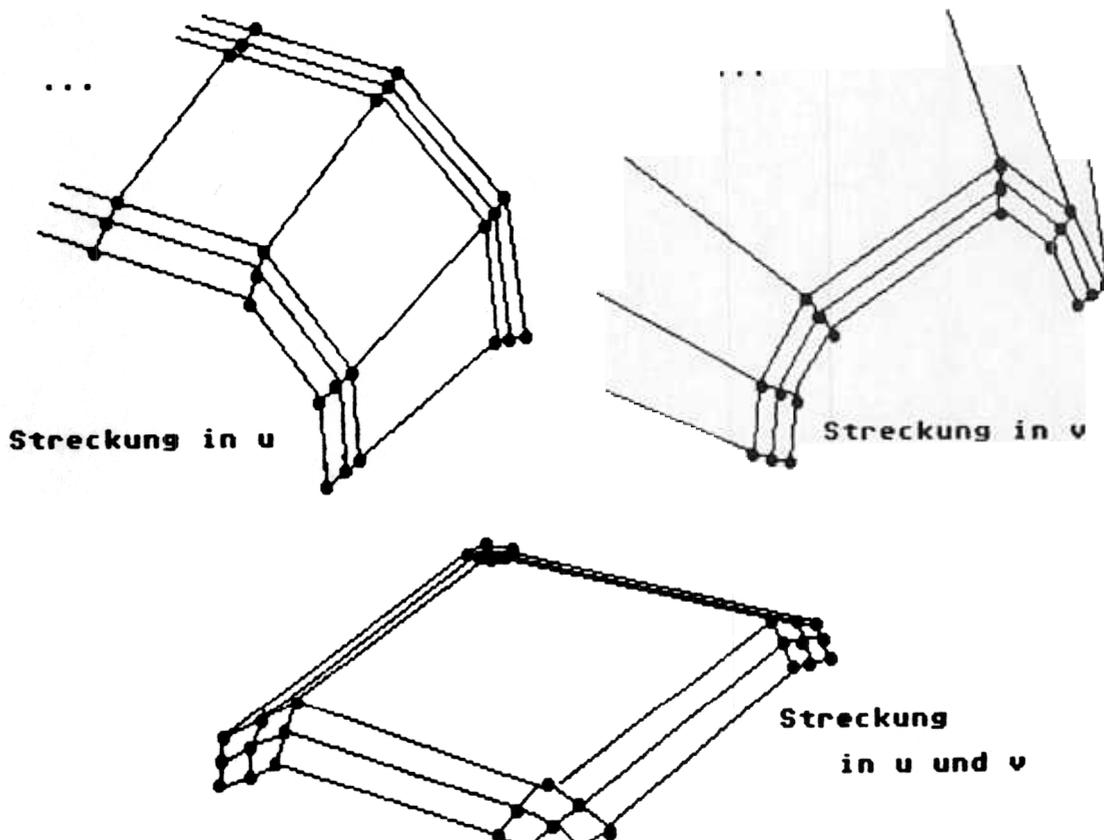
2.9. Bilder zu Kapitel 2

a) Zerlegung eines quintischen Bezierpolynoms an der Stelle $t = 0.5$

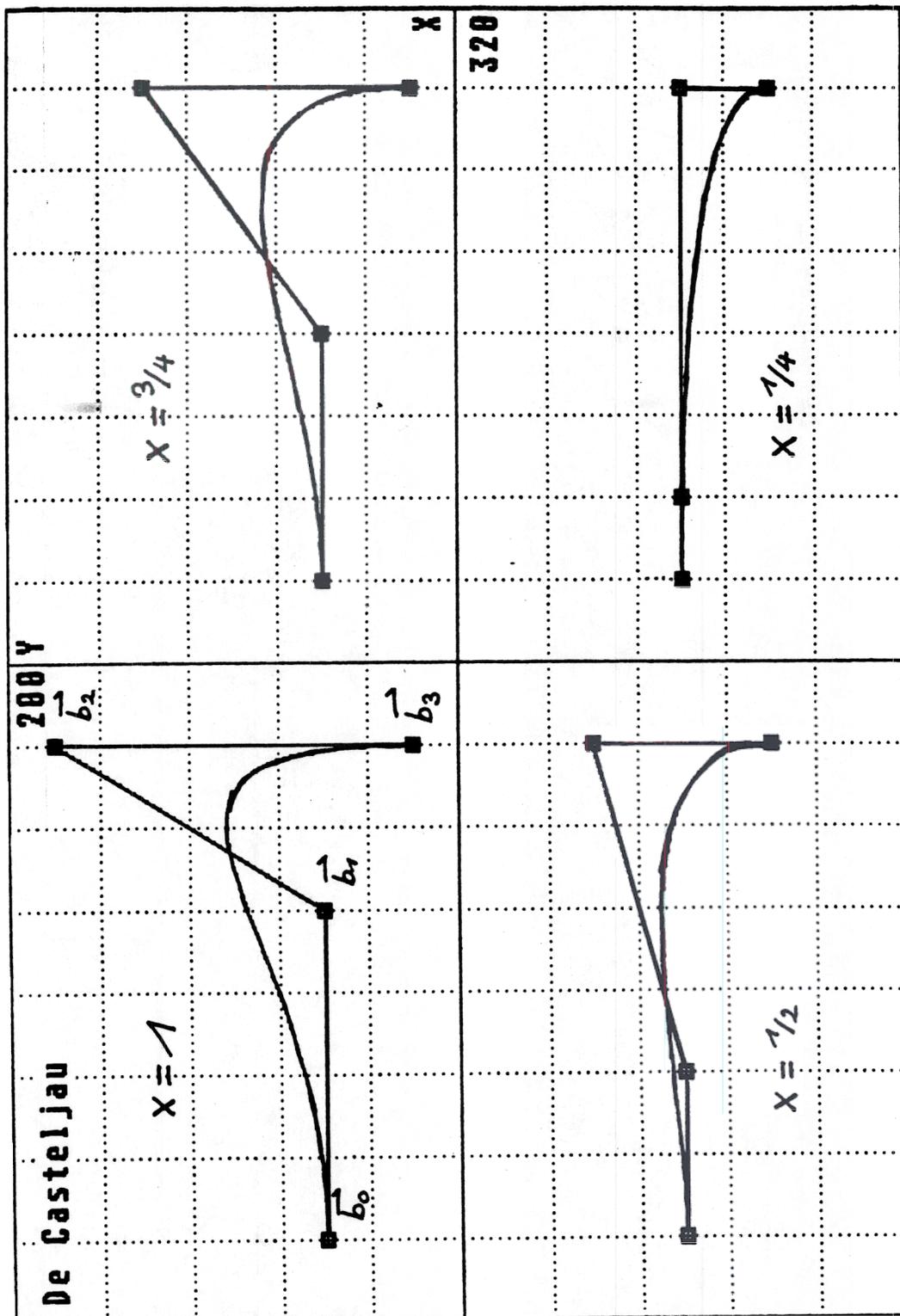
Auswirkung der Parameterintervall - Streckung eines biquintischen Bezierpunkt - Netzes



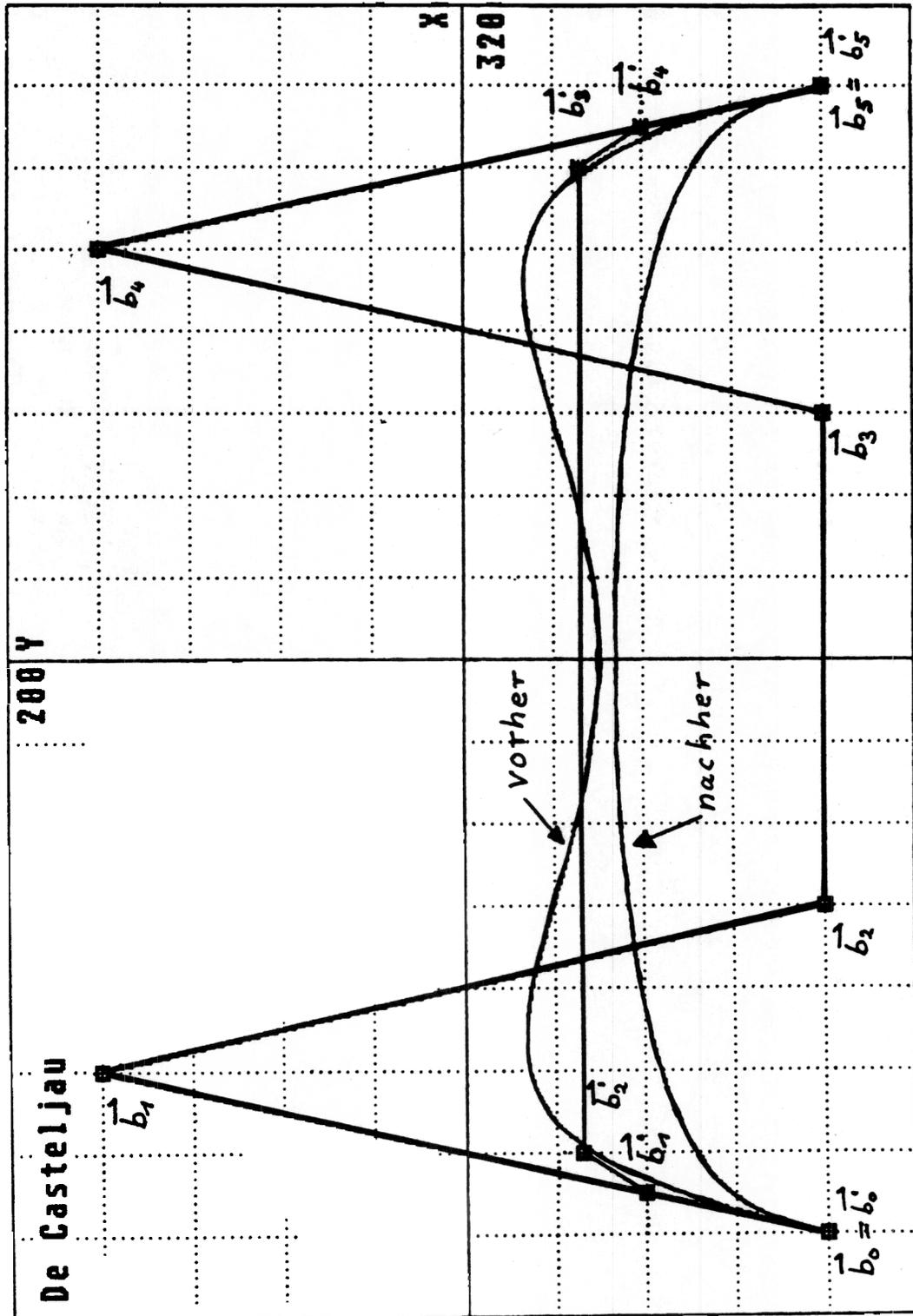
Zerlegung eines quintischen Bezierpolynoms für $t = 0.5$



b Auswirkung der Parameterintervall Streckung eines kubischen Beziersegmentes bei Streckfaktoren 1, 0.75 0.5 und 0.25



c) Beseitigung zweier Wendepunkte eines quintischen Beziersegmentes bei gleichen Vorzeichen der Randkrümmung



Kapitel 3 : Glättungsverfahren für Kurven und Flächen nach HOSCHEK

3.1. Erkennung unerwünschter Krümmungsbereiche

Zur Detektion von Wendepunkten in Kurven bzw. Vorzeichenwechseln der Gaußschen Krümmung in Flächen schlägt HOSCHEK zwei einander ähnliche Verfahren vor (die *polare* und die *k-orthotomische Abbildung*).

Beide beruhen darauf, zu einer gegebenen Kurve / Fläche eine duale Kurve / Fläche zu berechnen, in deren Verlauf die unerwünschten Krümmungsbereiche erheblich deutlicher sichtbar werden als in der ursprünglichen Kurve / Fläche. Beiden Methoden ist gemeinsam, daß die dualen Kurven / Flächen an den Stellen Singularitäten aufweisen, an denen die gegebenen Kurven / Flächen verschwindende Krümmung bzw. Gaußsche Krümmung haben.

Als erste Möglichkeit, Kurven bzw. Flächen auf eine duale Kurve bzw. Fläche abzubilden, soll die *polare Abbildung* beschrieben werden.

3.1.1. Polare Abbildung zur Erkennung von Wendepunkten

Eine ebene Kurve sei wie folgt in Parameterform gegeben

$$\vec{p}(t) = (x(t), y(t))^T \quad (\vec{p}(t) \text{ gehe nicht durch } (0,0)^T)$$

Eine *Polarität* ist eine lineare Transformation, die jeden Kurvenpunkt $\vec{p}(t)$ eindeutig auf eine Gerade abbildet und umgekehrt. Hoschek wählt dazu folgende Transformation :

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ wobei}$$

$$\vec{p}(t) = (x(t), y(t))^T \mapsto G^{(t)} = \{ \vec{q} = (\alpha, \beta)^T \mid \alpha x(t) + \beta y(t) + 1 = 0 \}$$

(3. 1

Da für ein festes t auch $x(t)$ und $y(t)$ fest sind, kann die zu $(x(t), y(t))^T$ gehörige Gerade auch geschrieben werden als $\beta = -(x(t)/y(t)) * \alpha - 1/y(t)$ (α als Abszisse und β als Ordinate !).

Durchläuft t nun seinen Definitionsbereich, so erhält man zu jedem Kurvenpunkt eine Gerade; je *eine* Gerade korrespondiert mit *einem* Kurvenpunkt $\vec{p}(t)$. Die zu $\vec{p}(t)$ gehörige *duale Kurve* erhält man jetzt dadurch, daß man die *Envelope* aller - jeweils zu einem Kurvenpunkt gehörenden - Geraden berechnet. Diese Envelope ist dann die duale Kurve der ursprünglich gegebenen Kurve. Für die Envelope müssen zwei Bedingungen erfüllt sein :

$$\begin{aligned} 1. & \quad \alpha x(t) + \beta y(t) + 1 \stackrel{!}{=} 0 & \text{und (Differentiation nach } t \text{)} \\ 2. & \quad \alpha \dot{x} + \beta \dot{y} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (3. 2)$$

(3. 2) ergibt ein LGS zur Bestimmung von α und β ; man findet für sie

$$\alpha(t) = \frac{-\dot{y}}{x\dot{y} - \dot{x}y} \quad \text{und} \quad \beta(t) = \frac{\dot{x}}{x\dot{y} - \dot{x}y} \quad (3. 3)$$

Durch $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ ist damit die duale Kurve gegeben $\tilde{p}(t)$ gehe nicht durch den Ursprung, s.o.!).

Auf analoge Weise gewinnt man zu einer Fläche die duale Fläche. Die Fläche sei gegeben in der Form

$$\tilde{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))^T$$

Die Transformation Flächenpunkt \longleftrightarrow Ebene hat somit die Darstellung

$$F \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{wobei}$$

$$\tilde{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))^T \longmapsto$$

$$E^{(u,v)} = \{ \tilde{q} = (\alpha, \beta, \gamma)^T \mid \alpha x(u,v) + \beta y(u,v) + \gamma z(u,v) + 1 = 0 \}$$

(3.4)

Die Schar der sich ergebenden Ebenen zu jedem Flächenpunkt stellt wiederum die Enveloppe der dualen Fläche dar; man erhält ihre Darstellung durch partielle Differentiation von F nach u und v und anschließender Elimination von α , β und γ :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{l} 1. \quad \alpha x + \beta y + \gamma z + 1 \stackrel{!}{=} 0 \\ 2. \quad F_u = \alpha x_u + \beta y_u + \gamma z_u \stackrel{!}{=} 0 \\ 3. \quad F_v = \alpha x_v + \beta y_v + \gamma z_v \stackrel{!}{=} 0 \end{array} \right) \quad \text{und} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Mit (3.5) erhält man die unbekanntenen Größen α , β und γ zu

$$\begin{aligned} \alpha(u,v) &= \frac{(-\tilde{e}_1, \tilde{y}, \tilde{z})}{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})} \\ \beta(u,v) &= \frac{(\tilde{x}, -\tilde{e}_1, \tilde{z})}{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})} \quad \text{und} \\ \gamma(u,v) &= \frac{(\tilde{x}, \tilde{y}, -\tilde{e}_1)}{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Hierbei ist $\tilde{x} = (x, x_u, x_v)^T$, $\tilde{y} = (y, y_u, y_v)^T$, $\tilde{z} = (z, z_u, z_v)^T$, $\tilde{e}_1 = (1, 0, 0)^T$; "(...)" stellt eine Determinante dar.

Bezeichnet man die duale Kurve zu $\tilde{p}(t)$ mit $\tilde{\tilde{p}}(t)$, so gilt zwischen beiden folgende Aussage (analog zwischen den Flächen $\tilde{p}(u,v)$ und $\tilde{\tilde{p}}(u,v)$):

- (1) Besitzt $\tilde{p}(t)$ einen Wendepunkt für $t=t_0$, so hat $\tilde{\tilde{p}}(t)$ eine Singularität für $t=t_0$ (Beweis: s. Hoschek!).

(ii) Ist die Gauß - Krümmung der regulären Fläche $\vec{p}(u, v)$ an der Stelle $(u, v) = (u_0, v_0)$ Null oder wechselt sie dort ihr Vorzeichen, so hat die duale Fläche $\vec{\tilde{p}}(u, v)$ dort eine Singularität (Beweis : s. Hoschek !) .

(3. 8)

Bem. : Der Begriff "Singularität" ist im Fall der dualen Kurve so zu verstehen, daß die duale Kurve an der Stelle t_0 einen Sprung in der ersten Ableitung hat ; im Fall der dualen Fläche hat wenigstens eine der beiden partiellen Ableitungen dieser dualen Fläche an der Stelle (u_0, v_0) einen Sprung. Diese "Spitzen" dienen dann der Detektion der unerwünschten Krümmungsbereiche .

An dieser Stelle sei dazu noch angemerkt, daß sich die duale Fläche zu einer Fläche bei Verwendung der unter (3.7) angegebenen Beziehungen auch schreiben läßt als

$$\vec{p}_{\text{polar}}(u, v) = - \frac{\vec{p}_u \times \vec{p}_v}{\det(\vec{p}, \vec{p}_u, \vec{p}_v)} \quad (3. 9)$$

wenn $\vec{p}(u, v)$ polar abgebildet wird.

3.1.2. k - orthotomische Kurven zur Erkennung von Wendepunkten

Zunächst soll beschrieben werden, wie man zu einer ebenen Kurve $\vec{p}(t)$ die 2 - orthotomische Kurve erhält ; sei \vec{q} ein beliebiger Punkt der Ebene, der nicht auf $\vec{p}(t)$ liegt und T die Tangente an $\vec{p}(t)$; dann erhält man den Punkt $\vec{\tilde{p}}(t)$ auf der 2 - orthotomischen Kurve, indem man den festen Punkt \vec{q} an der Achse T spiegelt. In diesem Fall haben also \vec{q} und $\vec{\tilde{p}}(t)$ den gleichen Abstand von der Tangente T, daher wird von einer 2 - orthotomischen Kurve gesprochen. Hat $\vec{\tilde{p}}(t)$ den doppelten Abstand von der Tangente, so liegt eine 3 - orthotomische Kurve vor usw.

Bezeichnet $\vec{n}(t)$ den Einheitsnormalenvektor zum Kurvenpunkt $\vec{p}(t)$, so kann man $\vec{\tilde{p}}(t)$ folgendermaßen ausdrücken :

$$\vec{\tilde{p}}(t) = \vec{q} + k * (\langle \vec{p}(t) - \vec{q}, \vec{n}(t) \rangle * \vec{n}(t)) \quad (3. 10)$$

Bem. : Im Spezialfall $k=2$ handelt es sich um eine Achsenspiegelung. Den Punkt $\vec{\tilde{p}}(t)$ erhält man für beliebiges aber festes t durch Spiegelung des Punktes \vec{q} an der Tangente (=Achse der Spiegelung) durch den Punkt $\vec{p}(t)$ an die gegebene Kurve.

Im Fall einer regulären Fläche $\vec{p}(u, v)$ wird die Tangente lediglich durch die Tangentialebene ausgetauscht. Ist $\vec{n}(u, v)$ der Einheitsnormalenvektor an die Fläche $\vec{p}(u, v)$, \vec{q} ein beliebiger Punkt im Raum, der nicht auf $\vec{p}(u, v)$ liegt, und T die Tangentialebene im Punkt $\vec{p}(u, v)$, so ergibt sich die k - orthotomische Fläche $\vec{\tilde{p}}(u, v)$ zu

$$\tilde{\vec{p}}(u,v) = \vec{q} + k * \langle \vec{p}(u,v) - \vec{q}, \vec{n}(u,v) \rangle * \vec{n}(u,v) \quad (3.11)$$

Für die k -orthotomischen Kurven bzw. Flächen gelten nun zu 3.8) analoge Sätze (Beweis : s. Hoschek !) :

- (i) Ist $\vec{p}(t)$ eine reguläre ebene Kurve der Klasse C^3 und ist \vec{q} ein beliebiger nicht auf $\vec{p}(t)$ liegender Punkt, durch den zugleich keine Tangente an $\vec{p}(t)$ läuft, so hat die k -orthotomische Kurve $\tilde{\vec{p}}(t)$ genau dann an $t=t_0$ eine Singularität, wenn $\vec{p}(t)$ dort einen Wendepunkt hat.
- (ii) Ist $\vec{p}(u,v)$ eine reguläre Fläche der Klasse C^3 und ist \vec{q} ein beliebiger nicht auf $\vec{p}(u,v)$ liegender Punkt, durch den zugleich keine Tangentialebene an $\vec{p}(u,v)$ läuft, so hat die k -orthotomische Fläche $\tilde{\vec{p}}(u,v)$ genau dann an $(u,v)=(u_0,v_0)$ eine Singularität, wenn $\vec{p}(u,v)$ dort die Gaußsche Krümmung 0 hat oder sie dort ihr Vorzeichen wechselt.

3. 12)

Bem. : Der Faktor k ist von Interesse, da die Singularitäten in einer k -orthotomischen Kurve / Fläche desto stärker hervortreten, je größer dieser Faktor ist.

3. 2. Glättungsverfahren nach HOSCHEK

3. 2. 1. Interaktives Glätten mittels Dualkurven

Die in 3.1. eingeführten dualen Gebilde zu einer Bezierkurve bzw. Bezierfläche eignen sich dazu, Wendepunkte zu beseitigen. Nach (3.8) bzw. (3.12) treten in einer dualen Kurve / Fläche deutlich Singularitäten hervor, wenn in einer gegebenen Kurve / Fläche Wendebereiche vorliegen. Man wird daher zweckmäßigerweise so verfahren, daß man zu jeder in einem ersten Schritt generierten Bezierkurve / -Fläche die jeweilige duale dazu erzeugt; dabei ist gleich, ob die unter 3.1.1. beschriebene polare Abbildung oder eine orthotomische Kurve / Fläche verwendet wird. Im Fall ebener Kurven wird man zu

$$\vec{p}(t) = (x(t), y(t))^T$$

also entweder die polare Kurve

$$\vec{p}_{\text{polar}} = \left(\frac{-\dot{y}}{x\ddot{y} - \dot{x}\dot{y}}, \frac{\dot{x}}{x\ddot{y} - \dot{x}\dot{y}} \right)^T$$

oder aber eine k -orthotomische Kurve

$$\vec{p}_{\text{ortho}} = \vec{q} + k * \langle \vec{p}(t) - \vec{q}, \vec{n}(t) \rangle * \vec{n}(t)$$

berechnen (entsprechend im Fall von Flächen). Fallen in \vec{p}_{polar} bzw. \vec{p}_{ortho} Singularitäten auf, so ist wie folgt vorzugehen :

- (i) Stelle fest, zu welchem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$ der (die) Parameterwert(e) gehört (gehören), für den (die) Singularitäten in der dualen Kurve auftreten.
- (ii) Prüfe, ob die Randbedingungen (Tangenten, Krümmungen) eines mit Wendepunkt behafteten Segmentes Seg_i - definiert auf $[t_i, t_{i+1}]$ - es zulassen, daß der Wendepunkt ausgelöscht werden kann (zu den Bedingungen für Wendepunktfreiheit siehe Kapitel 2, 2.6.).
- (iii) Kann ein Wendepunkt auf $[t_i, t_{i+1}]$ beseitigt werden, so ist im Sinne einer möglichst geringen Korrektur des Gesamtkurvenverlaufes das Segment / Kurvenstück Seg_i in 3 Segmente durch Zerlegung an den Stellen a und b derart aufzuteilen, daß die dabei neu entstehenden Segmente auf $[t_i, a]$ bzw. $[a, b]$ bzw. $[b, t_{i+1}]$ definiert sind und das mittlere Segment, definiert auf $[a, b]$, den Wendepunkt enthält.
- (iv) Das auf $[a, b]$ definierte, mit Wendepunkt behaftete Segment kann nun z. B. nach SCHELSKE (s. Kap. 2 !) durch Parameterintervall-Streckung korrigiert werden.
- (v) Wird dieses Vorgehen auf alle in der dualen Kurve enthaltenen Singularitäten angewendet, so können in der sich zum Schluß ergebenden dualen Kurve nur noch an den Stellen Singularitäten sein, an denen die Randbedingungen des zugehörigen Beziersegmentes keine Beseitigung eines Wendepunktes gestatten.

Der hier beschriebene Algorithmus kann natürlich mit den entsprechenden Übertragungen auch zur Detektion von Nullstellen der Gaußschen Krümmung in Bezierflächen herangezogen werden; dabei stellt sich jedoch das Problem einer geeigneten Korrektur des Bereiches, in dem der unerwünschte Krümmungsbereich vorliegt (s. SCHELSKE, Kap. 2, 2.8. !) .

3. 2. 2. Bezout - Determinante zum Prüfen auf Wendepunktfreiheit

Als weitere Methode, ausschließlich aufgrund der vorgegebenen Bezierpunkte einer Kurve / Fläche Wendebereiche zu finden, schlägt Hoschek die *Bezout - Determinante* vor. In Anbetracht der Tatsache, daß für die geometrischen Eigenschaften allein die Bezierpunkte ausreichen, wird bei diesem Verfahren der Parameter eliminiert. Als vorgegebenes Ziel für mit Wendepunkten behaftete Bezier-Kurvensegmente wird auch hier angestrebt, 2 Wendepunkte in einen Flachpunkt übergehen zu lassen, d. h., es soll der Zustand erreicht werden, daß

$$(i) \quad \vec{p}'(t) \times \vec{p}''(t) = 0 \quad \text{und} \quad (ii) \quad \vec{p}'(t) \times \vec{p}'''(t) = 0 \quad (3.13)$$

zugleich erfüllt sind

Bem. : Definiert man die Krümmung $k(t)$ einer ebenen Kurve $\vec{p}(t) = (x(t), y(t))^T$ als

$$k(t) := \frac{x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t)}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right)^{3/2}}$$

so liegt ein Flachpunkt an einer Stelle t dann vor, wenn zugleich $k(t)$ und $k'(t)$ dort Null sind; (3.13) stellt die dafür notwendigen Bedingungen dar (Zähler von $k(t)$ und $k'(t)$ als Kreuzprodukte geschrieben !) .

Die Ableitungen einer Bezierkurve lassen sich mit Vorwärtsdifferenzen (siehe Kapitel 1, 1.3) in der Form

$$\vec{p}'(t) = \frac{1}{b-a} * \frac{n!}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^1 \vec{b}_i * B_i^{n-1}(t) \quad ,$$

$$\vec{p}''(t) = \frac{1}{(b-a)^2} * \frac{n!}{(n-2)!} \sum_{i=0}^{n-2} \Delta^2 \vec{b}_i * B_i^{n-2}(t) \quad \text{und}$$

$$\vec{p}'''(t) = \frac{1}{(b-a)^3} * \frac{n!}{(n-3)!} \sum_{i=0}^{n-3} \Delta^3 \vec{b}_i * B_i^{n-3}(t) \quad t \in [a, b]$$

schreiben.

Dividiert man $B_i^n(t)$ durch $(b-t)^n$, so gewinnt man die Darstellung

$$B_i^n(t) / (b-t)^n = \binom{n}{i} * w^i \quad (3.14)$$

Die drei ersten Ableitungen der Bezierpolynome können damit bei Vernachlässigung unnötiger konstanter Faktoren folgendermaßen geschrieben werden :

$$\vec{p}' = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{c}_i w^i \quad , \quad \vec{p}'' = \sum_{i=0}^{n-2} \vec{d}_i w^i \quad , \quad \vec{p}''' = \sum_{i=0}^{n-3} \vec{e}_i w^i \quad (3.15)$$

Hierbei sind die Vektoren \vec{c}_i , \vec{d}_i und \vec{e}_i Vielfache der entsprechenden Vorwärtsdifferenzen :

$$\vec{c}_i = \binom{n-1}{i} \Delta^1 \vec{b}_i \quad , \quad \vec{d}_i = \binom{n-2}{i} \Delta^2 \vec{b}_i \quad , \quad \vec{e}_i = \binom{n-3}{i} \Delta^3 \vec{b}_i \quad .$$

Mit der Darstellungsweise (3.15) gilt für die beiden Kreuzprodukte aus (3.13):

$$\vec{p}' \times \vec{p}'' = \sum_{i=0}^{2n-3} r_i w^i \quad , \quad \vec{p}' \times \vec{p}''' = \sum_{i=0}^{2n-4} s_i w^i \quad , \quad \text{wobei}$$

$$r_i = \sum_{\substack{m, l \geq 0 \\ m+l = i \\ m \leq n-1 \\ l \leq n-2}} (\vec{c}_m \times \vec{d}_l) \quad \text{und} \quad s_i = \sum_{\substack{m, l \geq 0 \\ m+l = i \\ m \leq n-1 \\ l \leq n-3}} (\vec{c}_m \times \vec{e}_l) \quad .$$

Faßt man r_i und s_i zum Vektor $\vec{m}_i = (r_i, s_i)^T$ zusammen, so kann man die beiden Kreuzprodukte zu einem vektorwertigen Polynom (Dimension 2) zusammenfassen :

$$\vec{q}(w) = \sum_{i=0}^N \vec{m}_i w^i \quad N = 2n-3 \quad (3.16)$$

Um den Parameter w zu eliminieren, spaltet man $\vec{q}(w)$ in zwei Teile auf :

$$\vec{q}(t) = (t-a)^{N-1} * \left(\vec{m}_N w^1 + \dots + \vec{m}_{N-1} \right) \\ + \left(\vec{m}_{N-1-1} w^{N-1-1} + \dots + \vec{m}_0 \right)$$

Damit lassen sich folgende Terme bilden

$$\vec{v}_1(w) = \vec{m}_N w^1 + \dots + \vec{m}_{N-1}$$

Jetzt bilde man die N Polynome $\vec{v}_0 \times \vec{q}$, ..., $\vec{v}_{N-1} \times \vec{q}$:

$$\vec{v}_0 \times \vec{q} = \alpha_{0,0} w^{N-1} + \dots + \alpha_{0,N-1} \\ \dots \\ \vec{v}_{N-1} \times \vec{q} = \alpha_{N-1,0} w^{N-1} + \dots + \alpha_{N-1,N-1} \quad (3.)$$

Hierbei gilt für die Koeffizienten $\alpha_{k,1}$

$$\alpha_{k,1} = \sum_{\substack{p \geq \max(N-k, N-1) \\ p+q = 2N-k-1-1}}^p (\vec{m}_p \times \vec{m}_q) \quad (3.)$$

Damit hängen die $\alpha_{k,1}$ nur von den gegebenen Bezierpunkten ab; soll das Polynom \vec{q} aus (3.16) verschwinden, so muß

$$\det | \alpha_{k,1} | = 0 \quad (3.19)$$

erfüllt sein (*Bezout - Determinante*).

Somit ist es möglich, (3.19) als Glattheitskriterium zu verwenden ; hat man in einem Beziersegment einen Wendepunkt entdeckt, so sind die zugehörigen Bezierpunkte solange zu variieren, bis die Bedingung (3.19) erfüllt ist, d. h., ein Flachpunkt anstelle von zwei Wendepunkten entstanden ist.

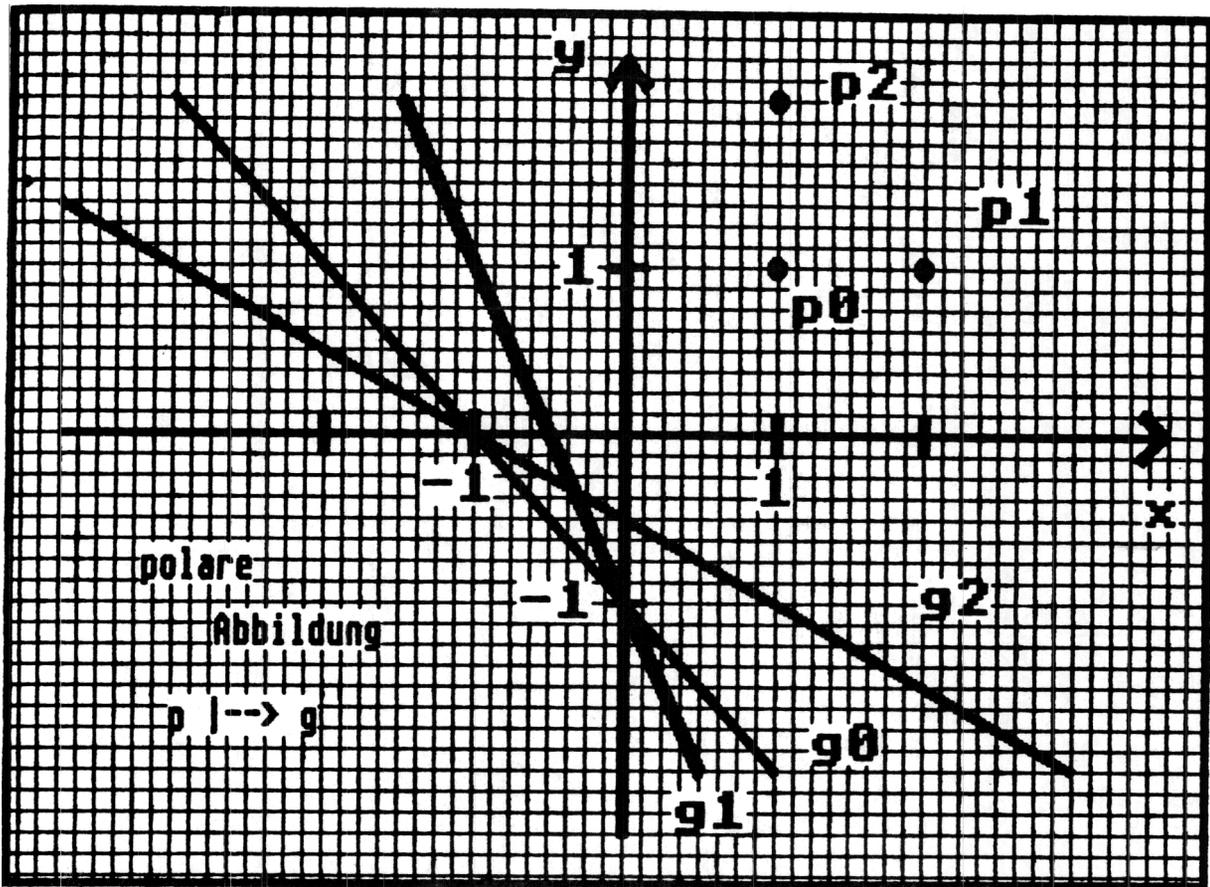
Im Falle segmentierter Bezierflächen zieht die Erzeugung eines Flachpunktes für die Gauß - Krümmung $K(u,v)$ an einer festen aber beliebigen Stelle die Beziehungen

$$K(u,v) = \partial K(u,v) / \partial u = \partial K(u,v) / \partial v = 0 \quad (3.20)$$

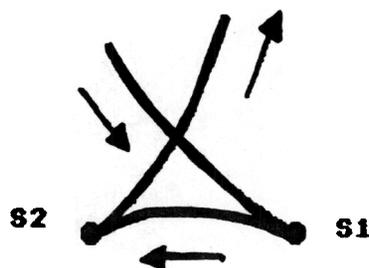
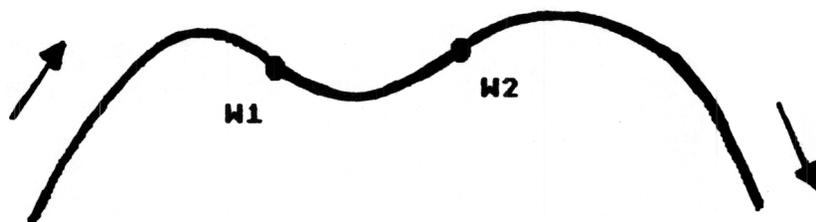
nach sich . Hoschek führt aus, wie man diesen Zustand durch Variation der Bezierpunkte und unter Verwendung der Bezout - Determinante erreichen kann (siehe HOSCHEK , Literaturangaben [11] und [12] !) .

3.3. Bilder zu Kapitel 3

- Prinzip einer polaren Abbildung : Punkt $= (x,y)^T \mapsto g = \text{Gerade}$, wobei
 $g : \quad xx' + yy' + 1 = 0$
- quintisches Beziersegment mit zugehörigem polarem Bild



quintisches Beziersegment



polares Bild
des Beziersegmentes

Kapitel 4 : Glättungsverfahren für bikubische Flächen nach BRUNET

BRUNET gibt in einer Publikation (1985) ein Verfahren an, die "Glattheit" eines bikubischen Patches an dessen inneren 4 Bezierpunkten zu messen und diese so zu modifizieren, daß sie sich einem "Ideal", den 4 inneren Bezierpunkten eines bilinearen Coons-Patches, möglichst annähern.

4. 1. Bestimmung der 4 Twists \vec{p}_{uv} an den Ecken eines Patches

Zunächst sollen einige Möglichkeiten erörtert werden, die 4 Twists \vec{p}_{uv} an den Ecken eines Patches zu bestimmen, wenn von vornherein nur die 4 das Patch begrenzenden Kurven $\vec{p}(0, v)$, $\vec{p}(1, v)$, $\vec{p}(u, 0)$ und $\vec{p}(u, 1)$ und die Ableitungen $\vec{p}_u(0, v)$, $\vec{p}_u(1, v)$, $\vec{p}_v(u, 0)$ und $\vec{p}_v(u, 1)$ gegeben sind und eine Auswertung des Patches nach Coons (s.Kapitel 1) angestrebt wird.

Die 4 Twists \vec{p}_{uv} , die in der Matrix

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \vec{p}(0,0) & \vec{p}(0,1) & \vec{p}_v(0,0) & \vec{p}_v(0,1) \\ \vec{p}(1,0) & \vec{p}(1,1) & \vec{p}_v(1,0) & \vec{p}_v(1,1) \\ \hline \vec{p}_u(0,0) & \vec{p}_u(0,1) & \vec{p}_{uv}(0,0) & \vec{p}_{uv}(0,1) \\ \vec{p}_u(1,0) & \vec{p}_u(1,1) & \vec{p}_{uv}(1,0) & \vec{p}_{uv}(1,1) \end{array} \right]$$

auftreten (vgl. Kapitel 1 (1.16), 1.5.2.), sollten *nicht* 0 gesetzt werden, da dies zu Pseudo-Flachpunkten im Patch führt. Es bieten sich aber zahlreiche andere Methoden, diese Größen vorzugeben.

4. 1. 1. Gewinnen der Twists aus dem Ferguson-Patch (Kapitel 1, 1.5.3.)

In Kapitel 1 (1.5.3.) wird erklärt, wie sich die Größen \vec{p} , \vec{p}_u , \vec{p}_v und \vec{p}_{uv} eines Patches in Abhängigkeit von den 16 Bezierpunkten $\vec{b}_{1,j}$ des zugehörigen Ferguson-TP - Patches ergeben; hier soll die Beschreibung für das Patch $\text{Seg}_{k,1}$ mit $u \in [u_k, u_{k+1}]$ und $v \in [v_1, v_{1+1}]$ erfolgen :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \vec{p}(1,j) & & \vec{p}_v(1,j) & \\ \hline & & & \vec{p}_{uv}(1,j) \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} (i \in \{u_k, u_{k+1}\}, \\ j \in \{v_1, v_{1+1}\}) \end{array}$$

=

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \vec{b}_{0,0} & \vec{b}_{0,3} & \beta(\vec{b}_{0,1} - \vec{b}_{0,0}) & \beta(\vec{b}_{0,3} - \vec{b}_{0,2}) \\ \vec{b}_{3,0} & \vec{b}_{3,3} & \beta(\vec{b}_{3,1} - \vec{b}_{3,0}) & \beta(\vec{b}_{3,3} - \vec{b}_{3,2}) \\ \hline \alpha(\vec{b}_{1,0} - \vec{b}_{0,0}) & \alpha(\vec{b}_{1,3} - \vec{b}_{0,3}) & \alpha\beta(\vec{b}_{0,0} - \vec{b}_{1,0} - \vec{b}_{0,1} + \vec{b}_{1,1}) & \alpha\beta(\vec{b}_{0,2} - \vec{b}_{1,2} - \vec{b}_{0,3} + \vec{b}_{1,3}) \\ \alpha(\vec{b}_{3,0} - \vec{b}_{2,0}) & \alpha(\vec{b}_{3,3} - \vec{b}_{2,3}) & \alpha\beta(\vec{b}_{2,0} - \vec{b}_{3,0} - \vec{b}_{2,1} + \vec{b}_{3,1}) & \alpha\beta(\vec{b}_{2,2} - \vec{b}_{3,2} - \vec{b}_{2,3} + \vec{b}_{3,3}) \end{array} \right]$$

(hierbei gilt : $\alpha = 3/(u_{k+1} - u_k)$, $\beta = 3/(v_{1+1} - v_1)$) .

Man erhält also für die Twists :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{uv}(u_k, v_1) &= \alpha\beta(\vec{b}_{0,0} - \vec{b}_{1,0} - \vec{b}_{0,1} + \vec{b}_{1,1}), \quad \vec{p}_{uv}(u_k, v_{1+1}) = \alpha\beta(\vec{b}_{0,2} - \vec{b}_{1,2} - \vec{b}_{0,3} + \vec{b}_{1,3}), \\ \vec{p}_{uv}(u_{k+1}, v_1) &= \alpha\beta(\vec{b}_{2,0} - \vec{b}_{3,0} - \vec{b}_{2,1} + \vec{b}_{3,1}), \quad \vec{p}_{uv}(u_{k+1}, v_{1+1}) = \alpha\beta(\vec{b}_{2,2} - \vec{b}_{3,2} - \vec{b}_{2,3} + \vec{b}_{3,3}). \end{aligned}$$

$$(\vec{b}_{0,0}, \dots, \vec{b}_{3,3} \text{ jeweils für Patch Seg}_{k,1}) \quad (4.1)$$

Hierbei sind $\vec{b}_{1,0}, \vec{b}_{1,3}, \vec{b}_{0,j}, \vec{b}_{3,j} - i,j=0..3$ - die 12 Bezierpunkte der 4 Randkurven, die 4 inneren Bezierpunkte $\vec{b}_{i,j} - i,j=1..2$ - sind Bezierpunkte, die sich durch Anwendung des TP-Schemas für bikubische TP-Flächen ergeben (s.Kapitel 1, (1.11), 1.4.) .

Man sieht auch, daß *nur die Twistvektoren \vec{p}_{uv} von den 4 inneren Bezierpunkten abhängen* .

Bem. : (i) Sind die 4 Twists in einem gemeinsamen Punkt zusammenlaufender Patches ungleich, so ist nur C^0 - Stetigkeit gegeben.

(ii) Soll der Verlauf / das Aussehen der 4 Randkurven bei einer Patch-Modifikation erhalten bleiben, so dürfen nur die Twists und damit nur die 4 inneren Bezierpunkte variiert werden.

4. 1. 2. Verwendung der Twists des bilinearen Coons-Patches (Adinis Twists)

Als weitere Möglichkeit bietet sich an, *Adinis Twists* zu verwenden; das sind die partiellen Ableitungen \vec{p}_{uv} , die sich ergeben, wenn man das bilineare Coons-Patch (Kapitel 1, 1.5.1.) entsprechend nach u und v an den 4 Eckpunkten differenziert. Geht man von dem allgemeinen Fall eines über $[u_k, u_{k+1}]$ und $[v_1, v_{1+1}]$ definierten Coons-Patches aus, so ergeben sich die einzelnen Teilflächen \vec{p}_1, \vec{p}_2 und \vec{p}_3 wie folgt :

$$\begin{aligned} \vec{p}_1(u,v) &= \frac{u_{k+1} - u}{\Delta u_k} * \vec{p}(u_k, v) - \frac{u_k - u}{\Delta u_k} * \vec{p}(u_{k+1}, v) \\ \vec{p}_2(u,v) &= \frac{v_{1+1} - v}{\Delta v_1} * \vec{p}(u, v_1) - \frac{v_1 - v}{\Delta v_1} * \vec{p}(u, v_{1+1}) \\ \vec{p}_3(u,v) &= \frac{(u_{k+1} - u)(v_{1+1} - v)}{\Delta u_k \Delta v_1} * \vec{p}(u_k, v_1) - \frac{(u_k - u)(v_{1+1} - v)}{\Delta u_k \Delta v_1} * \vec{p}(u_{k+1}, v_1) \\ &\quad + \frac{(u_{k+1} - u)(v_1 - v)}{\Delta u_k \Delta v_1} * \vec{p}(u_k, v_{1+1}) + \frac{(u_k - u)(v_1 - v)}{\Delta u_k \Delta v_1} * \vec{p}(u_{k+1}, v_{1+1}) \end{aligned}$$

$$(4.2)$$

Hierbei sind $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$ und $\Delta v_1 = v_{1+1} - v_1$. Das bilineare Coons-Patch ergibt sich damit zu $\vec{p} := \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3$.

Zur Bestimmung der 4 Ecktwists muß der Ausdruck $\vec{p}(u,v)$ nun nach u und v differenziert werden und der sich ergebende Term für die Stellen (u_k, v_1) , (u_{k+1}, v_1) , (u_k, v_{1+1}) und (u_{k+1}, v_{1+1}) ausgewertet werden. Bei diesem Vorgehen erhält man die folgenden 4 Adini-Twists :

$$\vec{a}_{k,1} = \frac{\vec{p}_u(u_k, v_{1+1}) - \vec{p}_u(u_k, v_1)}{\Delta v_1} + \frac{\vec{p}_v(u_{k+1}, v_1) - \vec{p}_v(u_k, v_1)}{\Delta u_k} - \vec{w}_{k,1}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{k,l+1} &= \frac{\vec{p}_u(u_k, v_{l+1}) - \vec{p}_u(u_k, v_l)}{\Delta v_l} + \frac{\vec{p}_v(u_{k+1}, v_{l+1}) - \vec{p}_v(u_k, v_{l+1})}{\Delta u_k} - \vec{w}_{k,l}, \\ \vec{a}_{k+1,l} &= \frac{\vec{p}_u(u_{k+1}, v_{l+1}) - \vec{p}_u(u_{k+1}, v_l)}{\Delta v_l} + \frac{\vec{p}_v(u_{k+1}, v_l) - \vec{p}_v(u_k, v_l)}{\Delta u_k} - \vec{w}_{k,l}, \\ \vec{a}_{k+1,l+1} &= \frac{\vec{p}_u(u_{k+1}, v_{l+1}) - \vec{p}_u(u_{k+1}, v_l)}{\Delta v_l} + \frac{\vec{p}_v(u_{k+1}, v_{l+1}) - \vec{p}_v(u_k, v_{l+1})}{\Delta u_k} - \vec{w}_{k,l}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Hierbei steht $\vec{w}_{k,l}$ für den Term

$$\vec{w}_{k,l} := \frac{\vec{p}(u_k, v_l) - \vec{p}(u_{k+1}, v_l) - \vec{p}(u_k, v_{l+1}) + \vec{p}(u_{k+1}, v_{l+1})}{\Delta u_k * \Delta v_l}$$

Die 4 Adini-Twists werden später dazu verwendet werden, die 4 inneren korrespondierenden Bezierpunkte des gleichen Patches vorzugeben.

4. 1. 3. Twist-Vorgabe nach Bessel

Ist ein zu interpolierendes Punktenetz $\vec{p}_{i,j} - i=0\dots m, j=0\dots n$ - gegeben, so können die Twists nach *Bessel* für alle *inneren Punkte* $\vec{p}_{i,j} - \text{d.h.: } 1 \leq i \leq m-1$ und $1 \leq j \leq n-1$ - dadurch gewonnen werden, daß durch einen solchen inneren Punkt und seine 8 "Nachbarpunkte" $\vec{p}_{i+r, j+s}$ mit $r, s \in \{-1, 1\}$ eine biquadratische interpolierende Fläche in den Variablen u und v mit $u \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$ und $v \in [v_{j-1}, v_{j+1}]$ festgelegt wird und man die erhaltene reguläre Beschreibung der Fläche anschließend für die Stelle (u_i, v_j) nach u und v differenziert.

Die Beschreibung einer zum Punkt $\vec{p}_{i,j}$ gehörenden Interpolierenden hat damit die Darstellung

$$\vec{p}(u, v) := \sum_{l=0}^2 \sum_{k=0}^2 \vec{c}_{k,l} * u^k * v^l ;$$

$$u \in [u_{i-1}, u_{i+1}], \quad v \in [v_{j-1}, v_{j+1}]$$

Die hier auftretenden Koeffizienten-Vektoren $\vec{c}_{k,l}$ werden durch Lösung des durch die 9 Interpolationsbedingungen gegebenen LGS bestimmt. Die sich ergebende Beschreibung $\vec{p}(u, v)$ ist dann nach u und v abzuleiten und für den aktuellen Punkt $\vec{p}_{i,j}$ zu berechnen.

Werden diese Rechnungen ausgeführt, so findet man die Twists :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{uv}(u_i, v_j) &:= (1-a_i)(1-b_j) * \vec{w}_{i-1, j-1} + (1-a_i) b_j * \vec{w}_{i-1, j} \\ &+ a_i (1-b_j) * \vec{w}_{i, j-1} + a_i b_j * \vec{w}_{i, j} \end{aligned}$$

wobei $a_i := \Delta u_{i-1} / (\Delta u_{i-1} + \Delta u_i)$, $b_j := \Delta v_{j-1} / (\Delta v_{j-1} + \Delta v_j)$ und die $\vec{w}_{i,j}$ wie oben unter Punkt 4.1.2. .

Da die hier skizzierte Möglichkeit der Twistbestimmung nur für die inneren Punkte des gegebenen Punktenetzes anwendbar ist, müssen die Twists für alle Randpunkte des Punktenetzes gesondert angegeben werden.

Bem. : Bei Verwendung dieser Twists und bikubischer Coons-Methoden ergibt sich nur eine C^1 - Fläche.

4. 2. Berechnung der Bezierpunkte und Brunets Kriterium für Glattheit

Mit den in Kapitel 1, (1.15), 1.5.2., aufgestellten Beziehungen zwischen Randkurven und den Größen \vec{p} , \vec{p}_u , \vec{p}_v und \vec{p}_{uv} an den Patch - Ecken findet man zur Bestimmung der Bezierpunkte $\vec{b}_{0,0}$, $\vec{b}_{1,0}$, $\vec{b}_{0,1}$ und $\vec{b}_{1,1}$ die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \vec{b}_{0,0} &:= \vec{p}(u_1, v_j), & (ii) \quad \vec{b}_{1,0} &:= \vec{p}(u_1, v_j) + \frac{\Delta u_1}{3} * \vec{p}_u(u_1, v_j), \\
 \vec{b}_{0,1} &:= \vec{p}(u_1, v_j) + \frac{\Delta v_j}{3} * \vec{p}_v(u_1, v_j) & \text{und schließlich} \\
 \vec{b}_{1,1} &:= -\vec{b}_{0,0} + \vec{b}_{0,0} + \frac{\Delta u_1}{3} * \vec{p}_u(u_1, v_j) + \vec{b}_{0,0} + \frac{\Delta v_j}{3} * \vec{p}_v(u_1, v_j) \\
 & \quad + \frac{\Delta u_1 \Delta v_j}{9} * \vec{p}_{uv}(u_1, v_j) \\
 \vec{b}_{0,0} + \vec{b}_{1,0} + \vec{b}_{0,1} &+ \frac{\Delta u_1 \Delta v_j}{9} * \vec{p}_{uv}(u_1, v_j) \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Für die restlichen 12 Bezierpunkte können natürlich entsprechende Gleichungen aufgestellt werden. Da nur die 4 inneren Bezierpunkte $\vec{b}_{1,1}$, $\vec{b}_{2,1}$, $\vec{b}_{1,2}$ und $\vec{b}_{2,2}$ von den jeweiligen Twists beeinflusst werden, können auch nur diese inneren Bezierpunkte durch Modifikation der Twists beeinflusst werden ; dies kommt einem Glättungsalgorithmus insofern entgegen, als die äußeren 12 Bezierpunkte nicht verändert werden dürfen, wenn die Randkurven eines Patches unverändert bleiben sollen.

Entscheidet man sich dafür, als Twist-Vorgabe den unter 4.1.2. vorgeschlagenen Adini-Twist zu verwenden, so ergibt sich für den Twist $\vec{a}(u_k, v_l) = \vec{a}(u_k, v_l)$:

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_{k,l} &= \frac{\vec{p}_u(u_k, v_{l+1}) - \vec{p}_u(u_k, v_l)}{\Delta v_l} + \frac{\vec{p}_v(u_{k+1}, v_l) - \vec{p}_v(u_k, v_l)}{\Delta u_k} \\
 & \quad + \frac{\vec{p}(u_k, v_l) - \vec{p}(u_{k+1}, v_l) - \vec{p}(u_k, v_{l+1}) + \vec{p}(u_{k+1}, v_{l+1})}{\Delta u_k * \Delta v_l} \\
 & = 3 \left(\frac{\vec{b}_{1,3} - \vec{b}_{0,3} - \vec{b}_{1,0} + \vec{b}_{0,0}}{\Delta u_k \Delta v_l} + \frac{\vec{b}_{3,1} - \vec{b}_{3,0} - \vec{b}_{0,1} + \vec{b}_{0,0}}{\Delta u_k \Delta v_l} \right) \\
 & \quad + (\vec{b}_{0,0} - \vec{b}_{3,0} - \vec{b}_{0,3} + \vec{b}_{3,3}) / (\Delta u_k \Delta v_l) \\
 & = (5\vec{b}_{0,0} - 2\vec{b}_{3,0} - 2\vec{b}_{0,3} - \vec{b}_{3,3} + 3\vec{b}_{1,3} + 3\vec{b}_{3,1} - 3\vec{b}_{1,0} - 3\vec{b}_{0,1}) / (\Delta u_k \Delta v_l)
 \end{aligned}$$

Setzt man nun $\vec{a}_{k,l}$ in (iv) von (4.4) für $\vec{p}_{uv}(u_1, v_j)$ ein, so erhält man für $\vec{b}_{1,1}$:

$$\begin{aligned}
 \vec{b}_{1,1} &:= -\vec{b}_{0,0} + \vec{b}_{1,0} + \vec{b}_{0,1} + \frac{\Delta u_k \Delta v_l}{9} * \vec{a}_{k,l} \\
 & = (2\vec{b}_{0,1} + \vec{b}_{3,1}) / 3 + (2\vec{b}_{1,0} + \vec{b}_{1,3}) / 3 - (4\vec{b}_{0,0} + 2\vec{b}_{0,3} + 2\vec{b}_{3,0} + \vec{b}_{3,3}) / 9.
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Entsprechend werden nun die restlichen inneren Bezierpunkte $\vec{b}_{2,1}$, $\vec{b}_{1,2}$ und $\vec{b}_{2,2}$ berechnet. Das Patch, das sich bei Anwendung dieser Methode zur Bestimmung der inneren Bezierpunkte ergibt, wird in Brunets Glättungsverfahren als "Bezugspatch" verwendet. Da hier eine bilineare Konstruktionsmethode zur Vorgabe der Twists zugrunde liegt (Adinis-Twists, Coons bilinear!), sollte dieses Patch im Innern minimale Oszillation enthalten, so daß der Vergleich anderer Patches, bei denen die Twistbestimmung auf andere Art und Weise erfolgt ist, mit diesem Bezugspatch sinnvoll erscheint.

Zur Messung der Oszillation eines bikubischen Bezierpatches schlägt Brunet folgendes Verfahren vor :

- (i) Nach Berechnung der 4 inneren Bezierpunkte eines Patches bilde man zwei Paare von Differenzvektoren :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &:= \vec{b}_{1,1} - \vec{b}_{1,2} & , & & \vec{v}_2 &:= \vec{b}_{2,1} - \vec{b}_{1,1} & \text{ und} \\ \vec{v}_3 &:= \vec{b}_{2,2} - \vec{b}_{2,1} & , & & \vec{v}_4 &:= \vec{b}_{1,2} - \vec{b}_{2,2} & . \end{aligned}$$

- (ii) Zu jedem der beiden Paare \vec{v}_1, \vec{v}_2 und \vec{v}_3, \vec{v}_4 berechne man den jeweils zu beiden \vec{v}_i -Vektoren senkrecht stehenden Vektor \vec{n}_1 bzw. \vec{n}_2 , die beide auf die Länge 1 normiert sein sollen :

$$\vec{n}_1 := \frac{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|} \quad , \quad \vec{n}_2 := \frac{\vec{v}_3 \times \vec{v}_4}{\|\vec{v}_3 \times \vec{v}_4\|} .$$

- (iii) Man bilde zu \vec{n}_1 und \vec{n}_2 die Vergleichs-Vektoren $\vec{n}_1^{(A)}$ und $\vec{n}_2^{(A)}$, die sich wie für \vec{n}_1 und \vec{n}_2 dargestellt berechnen lassen, nur daß die 4 inneren Bezierpunkte jetzt unter Verwendung der Adini-Twists bestimmt sein sollen.
- (iv) Aus \vec{n}_1 , \vec{n}_2 und $\vec{n}_1^{(A)}$, $\vec{n}_2^{(A)}$ gewinne man ein "Mittel", das wie folgt definiert ist :

$$\overline{\vec{n} \vec{n}^{(A)}} := \frac{1}{2} * (\langle \vec{n}_1, \vec{n}_1^{(A)} \rangle + \langle \vec{n}_2, \vec{n}_2^{(A)} \rangle) \quad (4.6)$$

Je besser sich das zu untersuchende Patch im Innern dem Bezugspatch mit Adinis-Twists nähert, desto dichter liegt diese Größe bei 1.

(Begründung : Alle in (4.6) auftretenden Vektoren sind auf die Länge 1 normiert ; die darin enthaltenen Skalarprodukte sind damit jeweils aus $[-1, 1]$. Beim Zusammenfallen von \vec{n}_1 mit $\vec{n}_1^{(A)}$ und \vec{n}_2 mit $\vec{n}_2^{(A)}$ sind die entsprechenden Skalarprodukte 1, das "Mittel" somit auch.)

4.3. BRUNETs Glättungsalgorithmus

Ziel in Brunets Glättungsalgorithmus ist es, die oben beschriebene Größe $\overline{\vec{n} \vec{n}^{(A)}}$ aus (4.6) möglichst dicht der 1 anzunähern.

Gegeben : $m * n$ bikubische Bezier-Patches mit jeweils 16 Bezierpunkten und ε - gibt die maximal erlaubte Abweichung der Größe $\overline{\vec{n} \vec{n}^{(A)}}$ von 1 an ($\overline{\vec{n} \vec{n}^{(A)}} \in [1 - \varepsilon, 1]$!)

Der Glättungsalgorithmus teilt sich damit in die beiden Schritte

- (i) Bestimmung all der Patches, für die $\overline{\vec{n}} \cdot \vec{n}^A \in [1 - \varepsilon, 1]$ nicht erfüllt ist
(ii) Modifikation der Twists all der unter (i) bestimmten Patches derart, daß $\overline{\vec{n}} \cdot \vec{n}^A$ innerhalb des gewünschten Intervalls liegt ;

hierbei sollen die Adini - Twists *nicht (!)* übernommen werden ; die gegebenen Twists sollen lediglich stärker den Adini-Twists angenähert werden, so daß das Patch nicht zu sehr verändert wird (stetiger Übergang zu Nachbarsegmenten geht verloren !) .

Eine koordinatenweise Twist-Modifikation stellt sich in Matrix-Schreibweise dann so dar :

$$\vec{p}_{uv}^{(neu)}(u_i, v_j) := A * \vec{p}_{uv}^{(alt)}(u_i, v_j)$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_{uv}^{(x)} \\ p_{uv}^{(y)} \\ p_{uv}^{(z)} \end{bmatrix}^{(alt)} \quad (4.7)$$

- (a, b, c = 0 => Nulltwist - Patch => evtl. Pseudo - Flachpunkte ;
a, b, c ∈ (0, 1] => Variieren zwischen Nulltwist-Patch und gegebenem Patch)

Bem. : 1. Es ist zu berücksichtigen, daß durch die Modifikation eines Twist - Vektors i.a. die eventuell gegebene C^2 - Eigenschaft der hier zusammenlaufenden Patches verlorengeht.

2. Durch Modifikation eines Twist-Vektors werden zugleich 4 Patches in ihrem Aussehen beeinflußt, nämlich diejenigen, die den zugehörigen Eckpunkt teilen.

3. Wird der Twist zur Bestimmung von $\vec{b}_{1,1} = 0$ gesetzt, so folgt nach (4.5), 4.2., daß $\vec{b}_{1,1}^{(0)} = -\vec{b}_{0,0} + \vec{b}_{1,0} + \vec{b}_{0,1}$; sei nun $\vec{p}_{uv}^{(neu)}(u_i, v_j)$ der modifizierte Twist-Vektor; dann liegt $\vec{b}_{1,1}^{(neu)}$ auf der Geraden durch $\vec{b}_{1,1}^{(0)}$ und $\vec{b}_{1,1}^{(alt)}$, sofern a = b = c.

4. Nach Brunet hat sich zum Erhalt ausreichender Glattheit im Mittel ein Modifikationsfaktor $\bar{a} \approx 0.75$ bewährt.

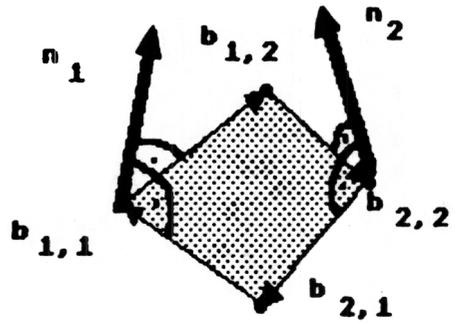
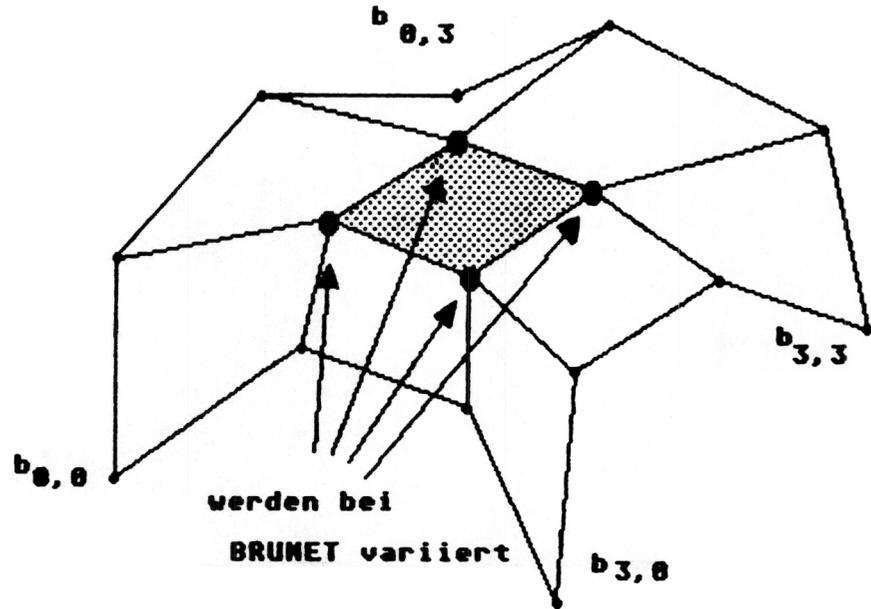
($\bar{a} = 1 / ((m+1) * (n+1)) * \sum a_{i,j}$, i=0...m, j=0...n, wobei

$$\vec{p}_{uv}^{(neu)}(u_i, v_j) := a_{i,j} * \vec{p}_{uv}^{(alt)}(u_i, v_j) .)$$

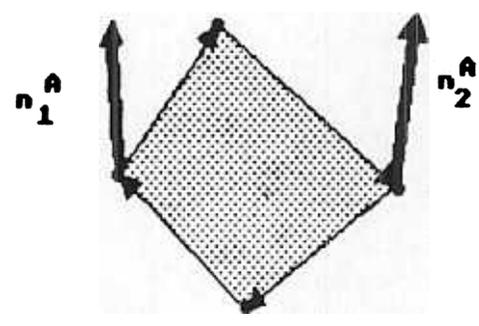
Ein Programm, das Brunets Verfahren realisiert, findet sich im Anhang dieser Arbeit.

4. 4. Bilder zu Kapitel 4

- Bezierpunkte - Netz eines bikubischen Patches
- Güte - Maß eines bikubischen Patches nach Brunet
- Möglichkeit einer Twist - Vorgabe an einem Knoten

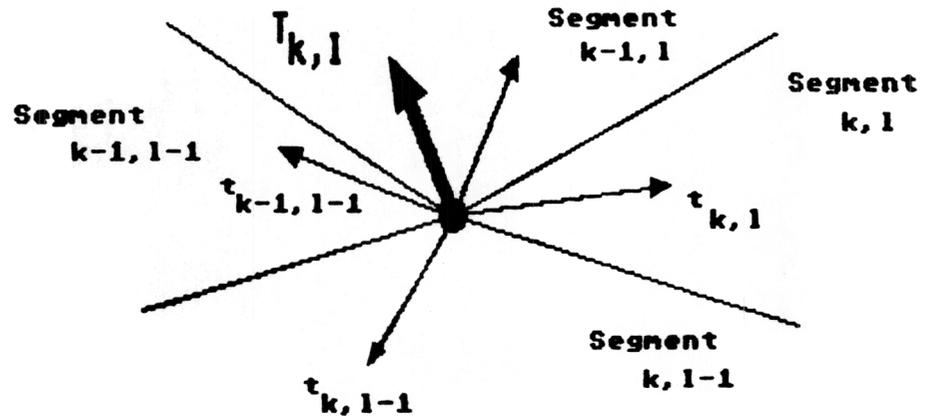


zu vergleichende innere
Bezierpunkte



innere Bezierpunkte
bei ADINIs Twists

$$GÜTE := 0.5 * (\langle n_1, n_1^A \rangle + \langle n_2, n_2^A \rangle)$$



Kapitel 5 : Automatische Glättungsverfahren

5.1. Glättungsalgorithmus nach WALTER und NOWACKI

5.1.1. Darstellung der Coons-Fläche nach WALTER / Optimalforderung

In seiner Dissertation "Numerische Darstellung von Oberflächen unter Verwendung eines Optimalprinzips" (1971) schlägt Harald WALTER eine Methode vor, die Twistvektoren an den Ecken eines Coons-Flächensegmentes unter Verwendung kubischer Hermite-Basisfunktionen geeignet zu bestimmen. Die prinzipielle Vorgehensweise dabei hat NOWACKI verwendet, um die Twists im Falle quintischer Hermite-Basisfunktionen zu berechnen.

Hier sollen zunächst WALTERs Darstellungsweise und Überlegungen eingeführt werden, um dann zu einem Verfahren zu führen, das einerseits über WALTERs Ideen insofern hinausgeht, als es quintische Basisfunktionen verwendet, das aber andererseits nur die Twists $\partial \vec{p}(u, v) / \partial u \partial v$ und nicht weitere gemischt-partielle Ableitungen zu den Knotenpunkten liefert.

Der sequentielle Aufbau der letztlich erstrebten Coons-Fläche soll nach WALTER in folgenden Schritten erfolgen :

- (i) Festlegung der die Fläche definierenden Knotenpunkte $\vec{p}_{k,l}$, wobei die beiden Indizes den Index-Mengen $\{0,1, \dots, m\}$ respektive $\{0,1, \dots, n\}$ angehören ; Bestimmung der u- und v- Partition $\{u_0, \dots, u_m\}$ bzw. $\{v_0, \dots, v_n\}$.

Bem. : Hier ist anzumerken, daß nicht notwendigerweise zu allen Index-Kombinationen (k, l) auch ein Punkt $\vec{p}_{k,l}$ gegeben sein muß .

- (ii) Generierung - möglichst glatter - Netzkurven , d.h. der Kurven , die jeweils die Punkte $\vec{p}_{k=\text{var},l=\text{const}}$ bzw. $\vec{p}_{k=\text{const},l=\text{var}}$ in u- bzw. v-Parameter-Richtung interpolieren (quintisch !).

Bem. : Auf Möglichkeiten, diese Netzkurven / Segment-Randkurven glatt zu berechnen, soll hier nicht eingegangen werden.

- (iii) Bestimmung *optimaler* Twists zu den jeweils vier Ecken eines jeden Flächensegmentes nach dem Verfahren von WALTER im Fall eines quintischen Kurven-Schemas.

- (iv) Auswertung der einzelnen Coons-Flächensegmente (jeweils über $[0,1]$ parametrisiert zu denken !) nach der Matrix-Darstellung

$$\vec{p}(u, v) = \vec{f}(u)^T * M * \vec{f}(v) =$$

$$\begin{bmatrix} h_0(u) \\ \bar{h}_0(u) \\ \bar{\bar{h}}_0(u) \\ h_1(u) \\ \bar{h}_1(u) \\ \bar{\bar{h}}_1(u) \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} \vec{p}_{00} & \vec{p}_{v00} & \vec{p}_{vv00} & \vec{p}_{01} & \vec{p}_{v01} & \vec{p}_{vv01} \\ \vec{p}_{u00} & \vec{p}_{uv00} & 0 & \vec{p}_{u01} & \vec{p}_{uv01} & 0 \\ \vec{p}_{uu00} & 0 & 0 & \vec{p}_{uu01} & 0 & 0 \\ \vec{p}_{10} & \vec{p}_{v10} & \vec{p}_{vv10} & \vec{p}_{11} & \vec{p}_{v11} & \vec{p}_{vv11} \\ \vec{p}_{u10} & \vec{p}_{uv10} & 0 & \vec{p}_{u11} & \vec{p}_{uv11} & 0 \\ \vec{p}_{uu10} & 0 & 0 & \vec{p}_{uu11} & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} h_0(v) \\ \bar{h}_0(v) \\ \bar{\bar{h}}_0(v) \\ h_1(v) \\ \bar{h}_1(v) \\ \bar{\bar{h}}_1(v) \end{bmatrix}$$

Bem.: Die 6 - elementigen Funktionen - Vektoren links bzw. rechts der Zentralmatrix aus (5.1.1) werden im folgenden Text mit den Vektoren $\vec{f}(u)$ bzw. $\vec{f}(v)$ bezeichnet.

Aus der Oberflächen-Schar Σ , deren Flächen S einzeln alle die gegebenen Knotenpunkte interpolieren und vorgeschriebene Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllen, soll nach WALTER die Fläche S^* als optimal gelten, für die

$$\int_{S^*} (k_1^2 + k_2^2) dS = \min_{S \in \Sigma} \int_S (k_1^2 + k_2^2) dS \quad \text{gilt.} \quad (5.1.2)$$

Hierbei sind k_1, k_2 die Hauptkrümmungen der Fläche.

5. 1. 2. Oberflächendarstellung und Optimalprinzip

Schreibt man in Normalen - Richtung zu den 4 Segmenträndern eines Segmentes Seg k,l die nicht-gemischten Ableitungen bis zum Grad 2 vor, so stellen sich die Forderungen an die beiden Ränder $v=0,1$ in der Form

$$\vec{b}_{k,l}(u) = \left[\vec{p}_{k,l}(u,0), \vec{p}_{v_{k,l}}(u,0), \vec{p}_{vv_{k,l}}(u,0), \vec{p}_{k,l}(u,1), \vec{p}_{v_{k,l}}(u,1), \vec{p}_{vv_{k,l}}(u,1) \right]^T$$

und an die Ränder $u=0,1$ in der Form

$$\vec{c}_{k,l}(v) = \left[\vec{p}_{k,l}(0,v), \vec{p}_{u_{k,l}}(0,v), \vec{p}_{uu_{k,l}}(0,v), \vec{p}_{k,l}(1,v), \vec{p}_{u_{k,l}}(1,v), \vec{p}_{uu_{k,l}}(1,v) \right]^T$$

dar.

(5.1. 3)

Werden unter Berücksichtigung dieser Vorschriften jeweils 2 gegenüberliegende Segment-Randkurven quintisch interpoliert, so stellt sich die Boolesche Summe der beiden auftretenden Projektoren zur Interpolation in u- bzw. v- Richtung folgendermaßen dar :

$$\vec{p}_{k,l}(u,v) = P_1 \oplus P_2$$

$$\begin{aligned} & \vec{b}_{k,l}^T(u) * \vec{f}(v) + \vec{f}^T(u) * \vec{c}_{k,l}(v) \\ & - \vec{f}^T(u) * M_{k,l} * \vec{f}(v) \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

(Bem.: $u, v \in [0,1]$; $M_{k,l}$ Zentralmatrix aus Darstellung (5.1.1) für Segment Seg $_{k,l}$)

Durch Nachrechnen läßt sich leicht verifizieren, daß diese Boolesche Summe alle vorgeschriebenen Eigenschaften für die Segmentränder einhält.

Bei Vorgabe beliebiger Ableitungen auf den Rändern bzw. normal dazu wird mit Formel (5.1.4) eine Fläche gewonnen, bei der alle Segmentgrenzen einen C^2 - stetigen Übergang aufweisen; während WALTER mit kubischen blinding functions arbeitet und damit nur C^1 - Stetigkeit an den Segment-Übergängen erzielt, wird durch den quintischen Ansatz C^2 - Übergang geschaffen (NOWACKI), wie er u. a. im Schiffbau nötig ist.

Die *freien Parameter* in der Darstellung (5.1.3) sind die Twists eines Segmentes, die im Sinne einer Minimierung des Integral-Ausdruckes (5.1.2) optimal vorzugeben sein werden.

Die oben angesprochene Flächenschar Σ ist nun dadurch gegeben, daß je Flächensegment die freien Parameter $\vec{p}_{uv_{k,l}}$, $\vec{p}_{uv_{k+1,l}}$, $\vec{p}_{uv_{k,l+1}}$ und $\vec{p}_{uv_{k+1,l+1}}$ variiert werden können. Aus der Schar Σ soll dann die Fläche gewonnen werden, für die die Minimalforderung (5.1.2) erfüllt ist.

Der Ausdruck (5.1.4) läßt sich durch Addition und gleichzeitige Subtraktion des Terms $\vec{f}^T(u) * M_{k,l} * \vec{f}(v)$ umformen in

$$\begin{aligned} \vec{p}_{k,l}(u,v) = & \vec{f}^T(u) * M_{k,l} * \vec{f}(v) \\ & + \left(\vec{b}_{k,l}^T(u) - \vec{f}^T(u) * M_{k,l} \right) * \vec{f}(v) \\ & + \vec{f}^T(u) * \left(\vec{c}_{k,l}(v) - M_{k,l} * \vec{f}(v) \right) \\ & \vec{f}^T(u) * M_{k,l} * \vec{f}(v) \\ & + \hat{\vec{b}}_{k,l}^T(u) * \vec{f}(v) \\ & + \vec{f}^T(u) * \hat{\vec{c}}_{k,l}(v) \\ & \vec{f}^T(u) * M_{k,l} * \vec{f}(v) \\ & + \vec{e}_{k,l}(u,v) . \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Für den Fall, daß quintische Hermite-Polynome $\vec{f}(u)$ und $\vec{f}(v)$ gewählt und damit keine Normalenableitungen längs der Segment-Ränder vorgeschrieben werden, läßt sich zeigen, daß der Anteil $\vec{e}_{k,l}(u,v)$ aus (5.1.5) identisch 0 ist. Damit sind als Interpolations-Vorgaben für ein Segment $\text{Seg}_{k,l}$ lediglich die Elemente der Matrix $M_{k,l}$ vorzugeben ("Eckpunkt-Information" der 4 Eckpunkte).

WALTER definiert auf der Schar Σ aller möglichen Flächen das Funktional \mathcal{G} mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathcal{G}(S) & \geq 0 \quad \text{für alle Flächen } S \in \Sigma \quad \text{und} \\ \text{(ii)} \quad \mathcal{G}(S) & = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S \text{ ist eine Ebene} . \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Diese Forderungen an \mathcal{G} sind sinnvoll, da damit die Interpretation von \mathcal{G} als *Abweichung von einer Ebene* interpretiert werden kann.

Zu jedem Punkt $\vec{p}(u,v)$ aus dem Inneren eines Segmentes läßt sich ein lokales Koordinatensystem $K_{\text{lok}} = \{x,y,z\}$ derart angeben, daß die x- und y-Achse in der Tangentialebene an \vec{p} verlaufen und die z-Achse in Richtung der Normalen zur Tangentialebene weist. Stellt man in diesem lokalen Koordinatensystem die Taylorentwicklung bis zu den Termen 2. Ordnung für $z = z(x,y)$ für die Entwicklungsstelle (0,0) auf, so gilt :

$$\begin{aligned}
z(x,y) &= z(0,0) + z_x(0,0) \cdot x + z_y(0,0) \cdot y \\
&+ \frac{1}{2} \cdot (z_{xx}(0,0) \cdot x^2 + z_{xy}(0,0) \cdot xy + z_{yy}(0,0) \cdot y^2) \\
&\frac{1}{2} \cdot (z_{xx}(0,0) \cdot x^2 + z_{xy}(0,0) \cdot xy + z_{yy}(0,0) \cdot y^2)
\end{aligned}
\tag{5.1.7}$$

Die Krümmungseigenschaften dieses oskulierenden Paraboloids bei $(x,y) = (0,0)$ stimmen mit denen des Flächenpunktes \vec{p} überein.

Liegen x- und y-Achse des lokalen System K_{lok} nun in Richtung der Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche, so folgt für die in (5.1.7) auftretenden partiellen Ableitungen :

$$(i) \ z_{xx}(0,0) = k_1, \quad (ii) \ z_{xy}(0,0) = 0 \quad \text{und} \quad (iii) \ z_{yy}(0,0) = k_2.$$

Somit läßt sich (5.1.7) schreiben als

$$z(x,y) = \frac{1}{2} \cdot (k_1 x^2 + k_2 y^2) \quad (5.1.8)$$

WALTER verwendet daher die Summe $k_1^2 + k_2^2$ als Maß für die lokale Abweichung von Fläche und Tangentialebene, das Integral über diese Summe und die gesamte Fläche als Maß für die globale Abweichung :

$$\mathcal{G}(S) = \iint_S (k_1^2 + k_2^2) dx dy = \int_S (k_1^2 + k_2^2) dS \quad (5.1.9)$$

Die freien Parameter - die Twists - sollen nun so bestimmt werden, daß der Ausdruck (5.1.9) minimal wird.

Um ein *lineares (!)* Gleichungssystem zur Bestimmung der Twists $\vec{p}_{uv,k,l}$ zu erhalten, führt WALTER ein Funktional $\tilde{\mathcal{G}}$ auf Σ ein, das mit dem Funktional \mathcal{G} auf Σ auf einer Teilmenge $\tilde{\Sigma}$ von Σ übereinstimmt; dabei ist $\tilde{\Sigma}$ wie folgt definiert :

$$\tilde{\Sigma} := \left\{ S \mid S \in \Sigma, \ E_{k,l} = \text{const}, \ F_{k,l} = 0, \ G_{k,l} = \text{const} \text{ für Segment } \text{Seg}_{k,l} \right\} \tag{5.1.10}$$

(Bem.: E, F und G sind die Größen der 1. Fundamentalform regulärer Flächen.)

Die Minimalforderung wird nun abgewandelt als

$$\tilde{\mathcal{G}}(S^*) \stackrel{!}{=} \min_{S \in \tilde{\Sigma}} \tilde{\mathcal{G}}(S) \quad \text{formuliert}$$

Drückt man das Funktional - die Hauptkrümmungen - (5.1.9) ausschließlich in Größen der 1. und 2. Fundamentalform regulärer Flächen aus, so findet man

$$\mathcal{G}(S) = \int_S \left((Eg - 2Ff + Ge)^2 - 2(eg - f^2) \cdot (EG - F^2) \right) / \left((EG - F^2)^2 \right) dS \tag{5.1.11}$$

(Bem.: $E = \langle \vec{p}_u, \vec{p}_u \rangle$, $F = \langle \vec{p}_u, \vec{p}_v \rangle$, $G = \langle \vec{p}_v, \vec{p}_v \rangle$ aus 1. Fundamentalform, $e = \langle \vec{p}_{uu}, \vec{n} \rangle$, $f = \langle \vec{p}_{uv}, \vec{n} \rangle$, $g = \langle \vec{p}_{vv}, \vec{n} \rangle$ aus 2. Fundamentalform)

Betrachtet man nur Flächen, die die Eigenschaften der Menge aus (5.1.10) erfüllen, so gewinnt man das einfachere Funktional

$$\mathcal{G}(\tilde{S}) = \sum_{(k,l) \in \text{Geb}_{k,l}} \iint (E_{k,l}^2 g^2 + 2E_{k,l} G_{k,l} f^2 + G_{k,l}^2 e^2) / ((E_{k,l} G_{k,l})^{3/2}) \, du dv. \quad (5.1.12)$$

Hierzu ist Folgendes zu bemerken

- (i) (k,l) spezifiziert das Segment $\text{Seg}_{k,l}$, worüber zu integrieren ist.
- (ii) $\text{Geb}_{k,l}$ ist das Definitionsgebiet $[u_k, u_{k+1}] \times [v_l, v_{l+1}]$ für Segment $\text{Seg}_{k,l}$.
- (iii) Die Größen E und G der 1. Fundamentalform sind segmentspezifisch, d.h., auf einem Flächen-Segment $\text{Seg}_{k,l}$ konstant und daher hier auch mit Index (k,l) versehen; F verschwindet für jedes Segment.
- (iv) Die Größen e , f und g der 2. Fundamentalform sind in jedem Segment weiterhin variabel, erhalten mithin keinen Index!

Für diesen eingeschränkten Typ von Flächen lassen sich die Größen e , f und g in der Form

$$e = \vec{p}_{uu} \quad f = \vec{p}_{uv} \quad \text{und} \quad g = \vec{p}_{vv} \quad \text{angeben.}$$

Unter Verwendung dieser Beziehungen und der Voraussetzung äquidistanter Parametrisation läßt sich das Funktional folgendermaßen schreiben :

$$\tilde{\mathcal{G}}(S) = \sum_{(k,l)} \iint_{00}^{11} A_{k,l} * |\vec{p}_{uu_{k,l}}|^2 + 2B_{k,l} * |\vec{p}_{uv_{k,l}}|^2 + C_{k,l} * |\vec{p}_{vv_{k,l}}|^2 \, du dv \quad (5.1.13)$$

$A_{k,l}$, $B_{k,l}$ und $C_{k,l}$ sind dabei definiert als

- (i) $A_{k,l} := (G_{k,l} / E_{k,l}^3)^{1/2}$,
- (ii) $B_{k,l} := (E_{k,l} * G_{k,l})^{-1/2}$,
- (iii) $C_{k,l} := (E_{k,l} / G_{k,l}^3)^{1/2}$.
- (iv) Vorgabemöglichkeit für $E_{k,l}$ (analog $G_{k,l}$): $E_{k,l} := \langle \vec{p}_{u_{k,l}}, \vec{p}_{u_{k,l}} \rangle$, wobei $\vec{p}_{u_{k,l}} := 0.25 * (\vec{p}_{u_{k,l}} + \vec{p}_{u_{k+1,l}} + \vec{p}_{u_{k,l+1}} + \vec{p}_{u_{k+1,l+1}})$ gilt.

Bem.: - Ist eine bivariate Funktion $z(x,y)$ auf $[0,1] \times [0,1]$ gegeben, so ist das Integral

$$\int_0^1 \int_0^1 (z_{xx}^2 + 2z_{xy}^2 + z_{yy}^2) \, dx \, dy$$

Ausdruck einer auf Biegung und Torsion beanspruchten elastischen Platte unter Voraussetzung kleiner Durchbiegung.

- WALTER gibt in seiner Dissertation einen Existenz- / Eindeutigkeitsatz der Lösung von (5.1.13) zur Bestimmung der Twistvektoren $\vec{p}_{uv_{k,l}}$ an.

5.1.3. Bestimmung des linearen Gleichungssystems zur Ermittlung der Twistvektoren $\vec{p}_{uv\ k,l}$

(5.1.13) ist extremal (minimal), wenn $\partial \tilde{\mathcal{G}}(S) / \partial \vec{p}_{uv\ i,j} = 0$ für (i,j) aus dem gültigen Index-Bereich gilt. Differenziert man $\tilde{\mathcal{G}}$ nun partiell nach dem Twist $\vec{p}_{uv\ i,j}$, so findet man :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}(S)}{\partial \text{twi}_{i,j}} &= 2 \sum_{(k,l) \neq (0,0)}^{1,1} \iint \left\{ A_{k,l} * p_{uu\ k,l} * \frac{\partial}{\partial \text{twi}_{i,j}} (p_{uu\ k,l}) \right. \\ &\quad + 2 B_{k,l} * p_{uv\ k,l} * \frac{\partial}{\partial \text{twi}_{i,j}} (p_{uv\ k,l}) \\ &\quad \left. + C_{k,l} * p_{vv\ k,l} * \frac{\partial}{\partial \text{twi}_{i,j}} (p_{vv\ k,l}) \right\} du dv. \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Bem.: Hier und im folgenden Text wird stellvertretend für eine Koordinate eines Knotenpunktes $\vec{p}_{k,l} = (p_{k,l}^x, p_{k,l}^y, p_{k,l}^z)^T$ nur $p_{k,l}$ geschrieben; entsprechend soll $\text{twi}_{i,j}$ eine Komponente des Twistvektors $\vec{p}_{uv\ i,j} = (p_{uv\ i,j}^x, p_{uv\ i,j}^y, p_{uv\ i,j}^z)^T$ bedeuten.

(5.1.14) ist folglich nacheinander zunächst für die x-, dann für die y-, schließlich für die z-Koordinaten der beteiligten Vektoren auszuwerten.

$p_{k,l} = p_{k,l}(u,v)$ ist hierbei - quintisches Hermite-Interpolations-Schema vorausgesetzt - wieder der Ausdruck $\vec{f}^T(u) * M_{k,l} * \vec{f}(v)$. Dabei stehen in $M_{k,l}$ natürlich auch nur die Elemente einer bestimmten Koordinate !

Es werden in (5.1.14) 2 Indexpaare verwendet : soll nach Twist $\text{twi}_{i,j}$ differenziert werden, so ist jedesmal die Summe über alle Flächen-Segmente $\text{Seg}_{k,l}$ zu bilden (rechte Seite von (5.1.14)).

Es sollen jetzt Teile des Integranden von (5.1.14) berechnet werden. Wird nach Twist $\text{twi}_{i,j}$ differenziert, so ist zu bedenken, daß dieser Twist nur in der Flächenbeschreibung von 4 Segmenten vorkommt, nämlich den Segmenten $\text{Seg}_{i-1,j-1}$, $\text{Seg}_{i,j-1}$, $\text{Seg}_{i-1,j}$ und $\text{Seg}_{i,j}$ (es sei denn, das Index-Tupel (i,j) spezifiziert einen Eck- oder Randpunkt der Gesamtfläche). Daher folgt für die Ableitungen nach Twist $\text{twi}_{i,j}$ des Integranden :

$$(i) \quad \frac{\partial}{\partial \text{twi}_{i,j}} (p_{uu\ k,l}(u,v)) = \bar{h}_\alpha''(u) * \bar{h}_\beta(v), \quad (k,l) = (i-\alpha, j-\beta) \\ = 0, \quad \text{sonst}$$

$$(ii) \quad \frac{\partial}{\partial \text{twi}_{i,j}} (p_{uv\ k,l}(u,v)) = \bar{h}_\alpha'(u) * \bar{h}_\beta'(v), \quad (k,l) = (i-\alpha, j-\beta) \\ = 0, \quad \text{sonst}$$

$$(iii) \quad \frac{\partial}{\partial tw_{i,j}} (p_{vv_{k,l}}(u,v)) = \bar{h}_\alpha(u) * \bar{h}_\beta(v), \quad (k,l) = (i-\alpha, j-\beta) \\ = 0, \quad \text{sonst}$$

(5.1.15)

Bem.: α und β sind aus $\{0,1\}$, so daß nur die 4 Segmente eingehen, die im Punkt $p_{i,j}$ zusammenlaufen.

Die in (5.1.14) auftretenden Integrale über den Hermite-Polynomen werden wie folgt abgekürzt :

$$(i) \quad \vec{u}_\alpha = \int_0^1 \vec{f}(u) * \bar{h}_\alpha(u) du = \int_0^1 \begin{bmatrix} h_0(u) \\ \bar{h}_0(u) \\ \bar{h}_0(u) \\ h_1(u) \\ \bar{h}_1(u) \\ \bar{h}_1(u) \end{bmatrix} * \bar{h}_\alpha(u) du,$$

$$(ii) \quad \vec{v}_\alpha = \int_0^1 \vec{f}'(u) * \bar{h}_\alpha'(u) du = \dots \quad \text{und}$$

$$(iii) \quad \vec{w}_\alpha = \int_0^1 \vec{f}''(u) * \bar{h}_\alpha''(u) du = \dots \quad \text{mit } \alpha \in \{0,1\}.$$

(5.1.16)

Damit sind \vec{u}_α , \vec{v}_α und \vec{w}_α jeweils 6-elementige Vektoren; es sind daher $6*3*2 = 36$ Integral-Konstanten zu bestimmen. Setzt man diese Abkürzungen in (5.1.14) ein, so ergibt sich das Funktional zu

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}(S)}{\partial tw_{i,j}} = 2 \sum_{\alpha, \beta=0}^1 * \left(\begin{aligned} & A_{i-\alpha, j-\beta} * \vec{w}_\alpha^T * M_{i-\alpha, j-\beta} * \vec{u}_\beta \\ & + 2 B_{i-\alpha, j-\beta} * \vec{v}_\alpha^T * M_{i-\alpha, j-\beta} * \vec{v}_\beta \\ & + C_{i-\alpha, j-\beta} * \vec{u}_\alpha^T * M_{i-\alpha, j-\beta} * \vec{w}_\beta \end{aligned} \right). \quad (5.1.17)$$

("*" am Summenzeichen bedeutet, daß nur solche Summanden genommen werden, die auch wirklich zum Flächen-Indexbereich gehören - nicht über die Ränder hinausgehen !)

Zur Aufstellung des LGS verfährt man nun so :

- (1) Man spaltet die auf der rechten Seite von (5.1.17) vorkommenden Matrizen $M_{k,l}$ in die Summe $M'_{k,l} + T_{k,l}$ auf, so daß $M'_{k,l}$ alle Anteile von $M_{k,l}$ außer den Twistanteilen enthält, $T_{k,l}$ dagegen *nur* aus diesen Twistanteilen besteht :

$$\begin{aligned}
&= M'_{k,l} + T_{k,l} \\
&= \begin{bmatrix} p_{vv}^{k,l} & p_{uv}^{k,l} & p_{uu}^{k,l} & p_{vv}^{k,l+1} & p_{uv}^{k,l+1} & p_{uu}^{k,l+1} \\ p_{uv}^{k,l} & 0 & 0 & p_{uv}^{k,l+1} & 0 & 0 \\ p_{uu}^{k,l} & 0 & 0 & p_{uu}^{k,l+1} & 0 & 0 \\ p_{vv}^{k+1,l} & p_{uv}^{k+1,l} & p_{uu}^{k+1,l} & p_{vv}^{k+1,l+1} & p_{uv}^{k+1,l+1} & p_{uu}^{k+1,l+1} \\ p_{uv}^{k+1,l} & 0 & 0 & p_{uv}^{k+1,l+1} & 0 & 0 \\ p_{uu}^{k+1,l} & 0 & 0 & p_{uu}^{k+1,l+1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{uv}^{k,l} & 0 & 0 & p_{uv}^{k,l+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{uv}^{k+1,l} & 0 & 0 & p_{uv}^{k+1,l+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.18)
\end{aligned}$$

(bzw. $\Delta u * p_u$, $(\Delta u)^2 * p_{uu}$, ... , wenn $\Delta u, \Delta v < 0$)

- (ii) Man setzt (5.1.18) in (5.1.17) ein, setzt die neu entstehende Gleichung 0 (Minimalforderung !) und löst nach den unbekanntenen Größen $p_{uv}^{k,l} = twl_{k,l}$ auf :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha, \beta=0}^1 * \left(A_{1-\alpha, j-\beta} * \vec{w}_\alpha^T * T_{1-\alpha, j-\beta} * \vec{u}_\beta \right. \\
&\quad + 2 B_{1-\alpha, j-\beta} * \vec{v}_\alpha^T * T_{1-\alpha, j-\beta} * \vec{v}_\beta \\
&\quad \left. + C_{1-\alpha, j-\beta} * \vec{u}_\alpha^T * T_{1-\alpha, j-\beta} * \vec{w}_\beta \right) \\
&= - \sum_{\alpha, \beta=0}^1 * \left(A_{1-\alpha, j-\beta} * \vec{w}_\alpha^T * M'_{1-\alpha, j-\beta} * \vec{u}_\beta \right. \\
&\quad + 2 B_{1-\alpha, j-\beta} * \vec{v}_\alpha^T * M'_{1-\alpha, j-\beta} * \vec{v}_\beta \\
&\quad \left. + C_{1-\alpha, j-\beta} * \vec{u}_\alpha^T * M'_{1-\alpha, j-\beta} * \vec{w}_\beta \right) = - q_{1,j} \quad (5.1.19)
\end{aligned}$$

Die Vektoren \vec{u}_α , \vec{v}_α und \vec{w}_α , die die 36 Integrale aus (5.1.16) repräsentieren, sollen geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
(i) \quad \vec{u}_\alpha &= [u_1^\alpha, u_2^\alpha, u_3^\alpha, u_4^\alpha, u_5^\alpha, u_6^\alpha]^T \\
(ii) \quad \vec{v}_\alpha &= [v_1^\alpha, v_2^\alpha, v_3^\alpha, v_4^\alpha, v_5^\alpha, v_6^\alpha]^T \quad \text{und} \\
(iii) \quad \vec{w}_\alpha &= [w_1^\alpha, w_2^\alpha, w_3^\alpha, w_4^\alpha, w_5^\alpha, w_6^\alpha]^T
\end{aligned}$$

Eine linke Seite von (5.1.19) für festes Paar (i,j) lautet ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha, \beta=0}^1 * \left(A_{1-\alpha, j-\beta} * \left(u_2^\beta * w_2^\alpha * twi_{1-\alpha, j-\beta} + u_2^\beta * w_5^\alpha * twi_{1-\alpha+1, j-\beta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + u_5^\beta * w_2^\alpha * twi_{1-\alpha, j-\beta+1} + u_5^\beta * w_5^\alpha * twi_{1-\alpha+1, j-\beta+1} \right) \right. \\
& + 2 B_{1-\alpha, j-\beta} * \left(v_2^\beta * v_2^\alpha * twi_{1-\alpha, j-\beta} + v_2^\beta * v_5^\alpha * twi_{1-\alpha+1, j-\beta} \right. \\
& \quad \left. + v_5^\beta * v_2^\alpha * twi_{1-\alpha, j-\beta+1} + v_5^\beta * v_5^\alpha * twi_{1-\alpha+1, j-\beta+1} \right) \\
& + C_{1-\alpha, j-\beta} * \left(w_2^\beta * u_2^\alpha * twi_{1-\alpha, j-\beta} + w_2^\beta * u_5^\alpha * twi_{1-\alpha+1, j-\beta} \right. \\
& \quad \left. + w_5^\beta * u_2^\alpha * twi_{1-\alpha, j-\beta+1} + w_5^\beta * u_5^\alpha * twi_{1-\alpha+1, j-\beta+1} \right) \left. \right).
\end{aligned}
\tag{5.1.20}$$

Je Paar (i, j) treten damit die 9 Unbekannten $twi_{i-1, j-1}$, $twi_{i, j-1}$, $twi_{i+1, j-1}$, $twi_{i-1, j}$, $twi_{i, j}$, $twi_{i+1, j}$, $twi_{i-1, j+1}$, $twi_{i, j+1}$ und $twi_{i+1, j+1}$ auf (vorausgesetzt, daß alle diese Twists Indizes des gültigen Indexbereiches haben !) .

Eine solche linke Seite einer Zeile des LGS soll geschrieben werden in der Form

$$\begin{aligned}
& K1 * twi_{i-1, j-1} + K2 * twi_{i-1, j} + K3 * twi_{i-1, j+1} \\
& + K4 * twi_{i, j-1} + K5 * twi_{i, j} + K6 * twi_{i, j+1} \\
& + K7 * twi_{i+1, j-1} + K8 * twi_{i+1, j} + K9 * twi_{i+1, j+1}
\end{aligned}
\tag{5.1.21}$$

Berechnet man die Integrale u_2^0 , u_5^0 , u_2^1 und u_5^1 , v_2^0 , v_5^0 , v_2^1 und v_5^1 und w_2^0 , w_5^0 , w_2^1 und w_5^1 , so findet man die Identitäten

$$\begin{aligned}
& \text{(i) } u_5^1 = u_2^0 \quad \text{und} \quad \text{(ii) } u_2^1 = u_5^0 \\
& \text{(iii) } v_5^1 = v_2^0 \quad \text{und} \quad \text{(iv) } v_2^1 = v_5^0 \quad \text{und} \\
& \text{(v) } w_5^1 = w_2^0 \quad \text{und} \quad \text{(vi) } w_2^1 = w_5^0
\end{aligned}
\tag{5.1.22}$$

Es bietet sich daher an, nur die Größen von \vec{u}_0 , \vec{v}_0 und \vec{w}_0 zu verwenden, also Komponenten von \vec{u}_1 , \vec{v}_1 und \vec{w}_1 gemäß (5.1.22) zu ersetzen.

Die in (5.1.21) auftretenden Koeffizienten werden nun durch Koeffizientenvergleich in (5.1.20) ermittelt. Dabei findet man

$$\begin{aligned}
\text{i) } K1 &= A_{i-1, j-1} * u_5^0 * w_5^0 + 2 B_{i-1, j-1} * v_5^0 * v_5^0 + C_{i-1, j-1} * w_5^0 * u_5^0 \\
K3 &= A_{i-1, j} * u_5^0 * w_5^0 + 2 B_{i-1, j} * v_5^0 * v_5^0 + C_{i-1, j} * w_5^0 * u_5^0 \\
K7 &= A_{i, j-1} * u_5^0 * w_5^0 + 2 B_{i, j-1} * v_5^0 * v_5^0 + C_{i, j-1} * w_5^0 * u_5^0 \\
K9 &= A_{i, j} * u_5^0 * w_5^0 + 2 B_{i, j} * v_5^0 * v_5^0 + C_{i, j} * w_5^0 * u_5^0
\end{aligned}$$

(5.1.23a)

$$\begin{aligned}
(ii) \quad K2 &= \sum_{\beta=0}^1 A_{i-1, j-\beta} * u_2^0 * w_5^0 + 2B_{i-1, j-\beta} * v_2^0 * v_5^0 + C_{i-1, j-\beta} * w_2^0 * u_5^0 \\
K8 &= \sum_{\beta=0}^1 A_{i, j-\beta} * u_2^0 * w_5^0 + 2B_{i, j-\beta} * v_2^0 * v_5^0 + C_{i, j-\beta} * w_2^0 * u_5^0 \\
K4 &= \sum_{\alpha=0}^1 A_{i-\alpha, j-1} * u_5^0 * w_2^0 + 2B_{i-\alpha, j-1} * v_5^0 * v_2^0 + C_{i-\alpha, j-1} * w_5^0 * u_2^0 \\
K6 &= \sum_{\alpha=0}^1 A_{i-\alpha, j} * u_5^0 * w_2^0 + 2B_{i-\alpha, j} * v_5^0 * v_2^0 + C_{i-\alpha, j} * w_5^0 * u_2^0
\end{aligned}$$

(5.1.23b)

$$(iii) \quad K5 = \sum_{\alpha, \beta=0}^1 A_{i-\alpha, j-\beta} * u_2^0 * w_2^0 + 2B_{i-\alpha, j-\beta} * v_2^0 * v_2^0 + C_{i-\alpha, j-\beta} * w_2^0 * u_2^0$$

(5.1.23c)

Die in den Formeln (5.1.23a) bis (5.1.23c) auftretenden Integrale u_2^0, \dots und w_5^0 seien an dieser Stelle angegeben :

$$\begin{aligned}
u_2^0 &= \frac{52}{3465} = 0.015007215 & v_2^0 &= \frac{8}{35} = 0.228571429 & w_2^0 &= \frac{192}{35} = 5.48571429, \\
u_5^0 &= \frac{-19}{1980} = -0.0095959595, & v_5^0 &= \frac{-1}{70} = -0.0142857144, & w_5^0 &= \frac{108}{35} = 3.08571428.
\end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Koeffizienten K1 bis K9 ist zu bedenken, daß sie für jeden Knoten (i, j) spezifisch sind, also besser mit Doppelindex (i, j) zu schreiben sind : $K1_{i,j}, \dots, K9_{i,j}$.

Das entstehende LGS soll hier für den Fall eines Gitters mit $(m+1)*(n+1)$ Punkten $p_{i,j}, i=0..m, j=0..n$, aufgestellt werden. Das LGS, das sich nach (5.1.19) ergibt, werde dargestellt als $A * \vec{x} = \vec{b}$. Hierbei ist

$$(i) \quad \vec{x} = \left[tw_{i0,0}, \dots, tw_{i0,n}, tw_{i1,0}, \dots, tw_{i1,n}, \dots, tw_{im,0}, \dots, tw_{im,n} \right]^T$$

$$(ii) \quad \vec{b} = \left[-q_{0,0}, \dots, -q_{0,n}, -q_{1,0}, \dots, -q_{1,n}, \dots, -q_{m,0}, \dots, -q_{m,n} \right]^T$$

Die Struktur der Matrix A erkennt man durch Aufstellen einiger Gleichungen :

$$(i,j) = (0,0) :$$

$$\begin{aligned} & K5_{0,0} twi_{0,0} + K6_{0,0} twi_{0,1} \\ & + K8_{0,0} twi_{1,0} + K9_{0,0} twi_{1,1} = -q_{0,0} \end{aligned}$$

$$(i,j) = (0,1) :$$

$$\begin{aligned} & K4_{0,1} twi_{0,0} + K5_{0,1} twi_{0,1} + K6_{0,1} twi_{0,2} \\ & + K7_{0,1} twi_{1,0} + K8_{0,1} twi_{1,1} + K9_{0,1} twi_{1,2} = -q_{0,1} \end{aligned}$$

$$(i,j) = (0,n) :$$

$$\begin{aligned} & K4_{0,n} twi_{0,n-1} + K5_{0,n} twi_{0,n} \\ & + K7_{0,n} twi_{1,n-1} + K8_{0,n} twi_{1,n} = -q_{0,n} \end{aligned}$$

$$(i,j) = (1,0) :$$

$$\begin{aligned} & K2_{1,0} twi_{0,0} + K3_{1,0} twi_{0,1} \\ & K5_{1,0} twi_{1,0} + K6_{1,0} twi_{1,1} \\ & + K8_{1,0} twi_{2,0} + K9_{1,0} twi_{2,1} = -q_{1,0} \end{aligned}$$

$$(i,j) = (1,1) :$$

$$\begin{aligned} & K1_{1,1} twi_{0,0} + K2_{1,1} twi_{0,1} + K3_{1,1} twi_{0,2} \\ & K4_{1,1} twi_{1,0} + K5_{1,1} twi_{1,1} + K6_{1,1} twi_{1,2} \\ & + K7_{1,1} twi_{2,0} + K8_{1,1} twi_{2,1} + K9_{1,1} twi_{2,2} = -q_{1,1} \end{aligned}$$

$$(i,j) = (1,n) :$$

$$\begin{aligned} & K1_{1,n} twi_{0,n-1} + K2_{1,n} twi_{0,n} \\ & K4_{1,n} twi_{1,n-1} + K5_{1,n} twi_{1,n} \\ & + K7_{1,n} twi_{2,n-1} + K8_{1,n} twi_{2,n} = -q_{1,n} \end{aligned}$$

Die Matrix A hat damit folgendes Aussehen :

$K5_{0,0}$	$K6_{0,0}$	0	0	0	$K8_{0,0}$	$K9_{0,0}$	0	0
$K4_{0,1}$	$K5_{0,1}$	$K6_{0,1}$	0	0	$K7_{0,1}$	$K8_{0,1}$	$K9_{0,1}$	0
0	$K4_{0,2}$	$K5_{0,2}$	$K6_{0,2}$	0	\dots	\dots	\dots	0
0	\dots	\dots	\dots	0	0	\dots	\dots	0
0	\dots	$K4_{0,n}$	$K5_{0,n}$	0	$K7_{0,n}$	$K8_{0,n}$	0	0
$K2_{1,0}$	$K3_{1,0}$	0	0	0	$K5_{1,0}$	$K6_{1,0}$	0	$K8_{1,0}$
$K1_{1,1}$	$K2_{1,1}$	$K3_{1,1}$	0	0	$K4_{1,1}$	$K5_{1,1}$	$K6_{1,1}$	0
0	$K1_{1,2}$	$K2_{1,2}$	$K3_{1,2}$	0	\dots	\dots	\dots	0
0	\dots	\dots	\dots	0	0	\dots	\dots	0
0	\dots	$K1_{1,n}$	$K2_{1,n}$	0	$K4_{1,n}$	$K5_{1,n}$	0	$K7_{1,n}$
0	\dots	0	0	0	\dots	\dots	\dots	$K8_{1,n}$
0	\dots	0	0	0	\dots	\dots	\dots	\dots

Dieses bedeutet, daß die Mittelung der Verbindungsvektoren zwischen $\vec{p}_{k,l}$ und $\vec{p}_{k+1,l}$ bzw. zwischen $\vec{p}_{k,l+1}$ und $\vec{p}_{k+1,l+1}$ als Wert für \vec{p}_α für das gesamte Segment $\text{Seg}_{k,l}$ angenommen wird (analog für \vec{p}_ν).

HAGEN gibt diese Einschränkung zugunsten einer größeren Flächenklasse auf (s. Abschnitt 5.2. !).

WALTERs Verfahren - hier auf biquintische Coons - Flächen erweitert - ist im Rahmen dieser Diplomarbeit implementiert worden (s. Anhang).

5. 2. Glättungsalgorithmus nach HAGEN und SCHULZE

5. 2. 1. Einführung notwendiger Größen der Differentialgeometrie

Es sollen an dieser Stelle ohne übermäßigen Formalismus die Größen der Differentialgeometrie zusammengetragen werden, die für den Fortgang der Erörterung unerlässlich sind.

Eine reguläre Fläche in E^3 ("E" - euklidische Norm) in der Darstellung $\vec{p}(u, v) := (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$ werde als hinreichend oft differenzierbar vorausgesetzt; sie ist durch zwei lokal invariante Größen eindeutig bestimmt: durch die *erste* und *zweite Fundamentalform*.

Ist eine Fläche $\vec{p}(u, v)$ gegeben, so folgt für deren Differential $d\vec{p} = \vec{p}_u du + \vec{p}_v dv$. Dies ist also eine lineare Abbildung der Vektoren $(du, dv)^T$ der u - v -Ebene auf die Vektoren $\vec{p}_u du + \vec{p}_v dv$. Das Kürzel "d" möge nicht nur auf die Variablen u und v , sondern auch auf das Bild dieser linearen Abbildung angewendet werden; daher wird für das Bild auch $d\vec{p}$ geschrieben. Für $d\vec{p}$ kann folgende Beziehung aufgestellt werden:

$$\vec{p}(u+du, v+dv) = \vec{p}(u, v) + d\vec{p} + \delta(\sqrt{du^2 + dv^2})$$

Somit ist $d\vec{p}$ eine Näherung für den Differenz-Vektor zweier Flächenpunkte $\vec{p}(u+du, v+dv)$ und $\vec{p}(u, v)$. Werden du und dv differentiell klein, so kann der "Korrektur-Vektor" δ vernachlässigt werden. Der Vektor $d\vec{p}$ und die erste Fundamentalform sind wichtig zur Berechnung von Bogenlängen und Flächeninhalten. Die erste Fundamentalform ist definiert als das skalare Produkt von $d\vec{p}$ mit sich selbst:

$$\begin{aligned} I &:= \langle d\vec{p}, d\vec{p} \rangle = \langle \vec{p}_u du + \vec{p}_v dv, \vec{p}_u du + \vec{p}_v dv \rangle \\ &= \langle \vec{p}_u, \vec{p}_u \rangle du^2 + 2 \langle \vec{p}_u, \vec{p}_v \rangle du dv + \langle \vec{p}_v, \vec{p}_v \rangle dv^2 \\ &= E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Die Größen $E := \langle \vec{p}_u, \vec{p}_u \rangle$, $F := \langle \vec{p}_u, \vec{p}_v \rangle$ und $G := \langle \vec{p}_v, \vec{p}_v \rangle$ der ersten Fundamentalform werden unten zur Berechnung von Flächen-Krümmungen und Twists herangezogen werden.

Zu einem Flächenpunkt $\vec{p}(u, v)$ mit partiellen Ableitungen \vec{p}_u und \vec{p}_v läßt sich unter Heranziehung der Einheitsnormalen an diesem Punkt ein *Dreibein* (zugleich ein Rechtssystem!) konstruieren:

$$\vec{n} := \frac{\vec{p}_u \times \vec{p}_v}{\|\vec{p}_u \times \vec{p}_v\|}$$

Das Differential von \vec{n} lautet $d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv$. Die zweite Fundamentalform ist definiert als das skalare Produkt dieses Differentials mit $d\vec{p}$ mit negativem Vorzeichen. Es gilt damit:

$$\begin{aligned} II &:= -\langle d\vec{p}, d\vec{n} \rangle = -\langle \vec{p}_u du + \vec{p}_v dv, \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv \rangle \\ &= -\langle \vec{p}_u, \vec{n}_u \rangle du^2 - (\langle \vec{p}_u, \vec{n}_v \rangle + \langle \vec{p}_v, \vec{n}_u \rangle) du dv \\ &\quad + \langle \vec{p}_v, \vec{n}_v \rangle dv^2 \end{aligned}$$

$$= e \, du \, du + 2f \, du \, dv + g \, dv \, dv \quad (5.2.2)$$

Aus der Tatsache, daß \vec{n} senkrecht zu \vec{p}_u und \vec{p}_v steht, folgt :

$e := -\langle \vec{p}_u, \vec{n}_u \rangle = \langle \vec{p}_{uu}, \vec{n} \rangle$, $f := -\langle \vec{p}_u, \vec{n}_v \rangle = -\langle \vec{p}_v, \vec{n}_u \rangle = \langle \vec{p}_{uv}, \vec{n} \rangle$ und $g := -\langle \vec{p}_v, \vec{n}_v \rangle = \langle \vec{p}_{vv}, \vec{n} \rangle$. Auch die Größen e , f und g werden zur Berechnung von Krümmungen und Twists benötigt werden.

Es sollen nun Eigenschaften der Ableitungen der Vektoren \vec{p}_u und \vec{p}_v unter Benutzung der (lokalen) Basis $\{\vec{p}_u, \vec{p}_v, \vec{n}\}$ untersucht werden. Stellt man die sich ergebenden Linearkombinationen zusammen, so findet man :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \vec{p}_{uu} &= \Gamma_{1,1}^1 * \vec{p}_u + \Gamma_{1,1}^2 * \vec{p}_v + L_1 * \vec{n} \quad , \\ \text{(ii)} \quad \vec{p}_{uv} &= \Gamma_{1,2}^1 * \vec{p}_u + \Gamma_{1,2}^2 * \vec{p}_v + L_2 * \vec{n} \quad , \\ \text{(iii)} \quad \vec{p}_{vu} &= \Gamma_{2,1}^1 * \vec{p}_u + \Gamma_{2,1}^2 * \vec{p}_v + L_3 * \vec{n} \quad , \\ \text{(iv)} \quad \vec{p}_{vv} &= \Gamma_{2,2}^1 * \vec{p}_u + \Gamma_{2,2}^2 * \vec{p}_v + L_4 * \vec{n} \quad . \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Die Koeffizienten $\Gamma_{i,j}^k$ in dieser Darstellung werden *Christoffel-Symbole* genannt. Zur Berechnung der Koeffizienten L_i - $i=1..4$ - multipliziert man die Gleichungen (i) bis (iv) skalar mit \vec{n} :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \langle \vec{p}_{uu}, \vec{n} \rangle &= \Gamma_{1,1}^1 * \langle \vec{p}_u, \vec{n} \rangle + \Gamma_{1,1}^2 * \langle \vec{p}_v, \vec{n} \rangle + L_1 * \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle \\ &= \quad \quad \quad 0 \quad + \quad \quad \quad 0 \quad + L_1 * 1 \\ &= L_1 \quad (\text{denn : } \vec{n} \text{ senkrecht zu } \vec{p}_u \text{ und } \vec{p}_v \text{ und } \vec{n} \text{ hat die Länge } 1) \quad , \\ \text{(ii)} \quad \langle \vec{p}_{uv}, \vec{n} \rangle &= L_2 \quad , \\ \text{(iii)} \quad \langle \vec{p}_{vu}, \vec{n} \rangle &= L_3 \quad , \\ \text{(iv)} \quad \langle \vec{p}_{vv}, \vec{n} \rangle &= L_4 \quad . \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Auf der Linken Seite der Gleichungen von (5.2.4) stehen jeweils Größen der zweiten Fundamentalform; man kann daher auch schreiben :

$$\text{(i)} \, L_1 = e \quad , \quad \text{(ii)} \, L_2 = f \quad , \quad \text{(iii)} \, L_3 = f \quad , \quad \text{(iv)} \, L_4 = g \quad (5.2.5)$$

Zur Bestimmung der Christoffel-Symbole werden die Gleichungen (i) bis (iv) von (5.2.3) mit \vec{p}_u und mit \vec{p}_v skalar multipliziert. Man erhält unter Berücksichtigung der Größen E , F und G der zweiten Fundamentalform :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \langle \vec{p}_{uu}, \vec{p}_u \rangle &= \Gamma_{1,1}^1 * \langle \vec{p}_u, \vec{p}_u \rangle + \Gamma_{1,1}^2 * \langle \vec{p}_v, \vec{p}_u \rangle + L_1 * \langle \vec{n}, \vec{p}_u \rangle \\ &= \Gamma_{1,1}^1 * E \quad + \Gamma_{1,1}^2 * F \quad + \quad 0 \\ &= \Gamma_{1,1}^1 * E + \Gamma_{1,1}^2 * F \\ &\quad (\text{denn : } \vec{n} \text{ steht senkrecht zu } \vec{p}_u) \quad , \\ \langle \vec{p}_{uu}, \vec{p}_v \rangle &= \Gamma_{1,1}^1 * F + \Gamma_{1,1}^2 * G \quad , \\ \text{(ii)} \quad \langle \vec{p}_{uv}, \vec{p}_u \rangle &= \Gamma_{1,2}^1 * E + \Gamma_{1,2}^2 * F \quad , \\ \langle \vec{p}_{uv}, \vec{p}_v \rangle &= \Gamma_{1,2}^1 * F + \Gamma_{1,2}^2 * G \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad \langle \vec{p}_{vu}, \vec{p}_u \rangle &= \Gamma_{2,1}^1 * E + \Gamma_{2,1}^2 * F \quad , \\
\langle \vec{p}_{vu}, \vec{p}_v \rangle &= \Gamma_{2,1}^1 * F + \Gamma_{2,1}^2 * G \quad , \\
\text{(iv)} \quad \langle \vec{p}_{vv}, \vec{p}_u \rangle &= \Gamma_{2,2}^1 * E + \Gamma_{2,2}^2 * F \quad , \\
\langle \vec{p}_{vv}, \vec{p}_v \rangle &= \Gamma_{2,2}^1 * F + \Gamma_{2,2}^2 * G \quad . \quad (5.2.6)
\end{aligned}$$

Soll der Twist-Vektor \vec{p}_{uv} mittels (ii) von (5.2.3) bestimmt werden, so sind die Koeffizienten $\Gamma_{1,2}^1$, $\Gamma_{1,2}^2$ und L_2 zu bestimmen. Nach (5.2.5) gilt $L_2 = f$; die beiden Christoffel-Symbole können aus dem LGS (ii) von (5.2.6) errechnet werden. Man erhält somit die Beziehungen :

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad L_2 &= f = \langle \vec{p}_{uv}, \vec{n} \rangle \quad , \\
\text{(ii)} \quad \Gamma_{1,2}^1 &= \frac{G \langle \vec{p}_{uv}, \vec{p}_u \rangle - F \langle \vec{p}_{uv}, \vec{p}_v \rangle}{EG - F^2} \quad , \\
\text{(iii)} \quad \Gamma_{1,2}^2 &= \frac{-F \langle \vec{p}_{uv}, \vec{p}_u \rangle + E \langle \vec{p}_{uv}, \vec{p}_v \rangle}{EG - F^2} \quad . \quad (5.2.7)
\end{aligned}$$

Da all diese Koeffizienten noch die Twist-Größen \vec{p}_{uv} enthalten, kann er selbst nicht unter Benutzung dieser Faktoren bestimmt werden.

5. 2. 2. Das Glattheitskriterium von HAGEN

Zunächst sollen Begriffe eingeführt werden, die zur weiteren Erörterung benötigt werden. Differenziert man den Einheitsnormalenvektor $\vec{n}(u, v)$ an eine reguläre Fläche und stellt die Ableitungen nach u bzw. v als Linearkombination der Ableitungen $\partial p(u, v) / \partial u$ bzw. $\partial p(u, v) / \partial v$ dar, so erhält man eine von *Weingarten* eingeführte Darstellung :

$$\begin{bmatrix} \vec{n}_u(u, v) \\ \vec{n}_v(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \vec{p}_u(u, v) \\ \vec{p}_v(u, v) \end{bmatrix} \quad (5.2.8)$$

Die beiden zu dieser linearen Abbildung gehörenden Eigenwerte k_1 und k_2 werden *Hauptkrümmungen* der Fläche genannt.

Die beiden Größen $K := k_1 * k_2$ und $H := (k_1 + k_2) / 2$ werden *Gauß-Krümmung* bzw. *mittlere Krümmung* genannt.

Hagens Ziel besteht darin, das Integral über die Summe der Quadrate der beiden Hauptkrümmungen einer regulären Fläche zu minimieren :

$$\int_A (k_1^2 + k_2^2) dA = \int_{\text{Geb}} (k_1^2 + k_2^2) \sqrt{EG - F^2} du dv \longrightarrow \min \quad (5.2.9)$$

Bem. : 1. Der Flächeninhalt einer regulären Fläche ist gerade gegeben durch

$$\text{Fläche} = \int_{\text{Geb}} \sqrt{EG - F^2} du dv \quad .$$

2. Die physikalische Begründung, den Ausdruck in (5.2.9) zu minimieren, ist die, daß (5.2.9) die Spannung gegeben aus Krümmungs- und Torsionsanteil in einem Flächenstück beschreibt.

Stellt man die in (5.2.9) auftretenden Hauptkrümmungen in den Größen der 1. und 2. Fundamentalform auf, so ergibt sich das Funktional

$$\int_{\text{Geb}} \left\{ \begin{aligned} & E^2 / (EG-F^2)^{5/2} * (\det(\vec{p}_{vv}, \vec{p}_u, \vec{p}_v))^2 \\ & + G^2 / (EG-F^2)^{5/2} * (\det(\vec{p}_{uu}, \vec{p}_u, \vec{p}_v))^2 \\ & + 2 / (EG-F^2)^{3/2} * (\det(\vec{p}_{uv}, \vec{p}_u, \vec{p}_v))^2 \end{aligned} \right\} du dv \quad (5.2.10)$$

Dieses Funktional soll für die (segmentierten) *Gordon-Coons-Flächen*, die auf einer biquintischen Interpolationsvorschrift basieren, minimiert werden. An die Flächen, die variiert werden sollen, werden dazu folgende Anforderungen gestellt :

- (i) $\vec{p}^{(\text{var})}(u,v) = \vec{p}(u,v) + \varepsilon \lambda(u,v) * \vec{n}(u,v)$
 (d.h.: die variiierende Fläche setzt sich aus einem festen Anteil $\vec{p}(u,v)$ und einem Variationsanteil, der die Normalen gewichtet, zusammen.)
 (ii) $\lambda(u,v)$ ist 0 längs der Patch-Ränder, d.h., daß hier der Variationsanteil verschwindet.
 (iii) $e^{(\text{var})} = e$ und $g^{(\text{var})} = g$, d.h., diese Größen der 2. Fundamentalform bleiben während des Variationsprozesses erhalten.
 (iv) Der "Misch-Twist" $\vec{p}_{uv} := \delta \vec{p}_{uv} + \delta \vec{p}_{vu}$ ist zur Normalen \vec{n} parallel.

$$\langle \vec{p}_{uv}^{(\text{var})}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{p}_{uv}, \vec{n} \rangle \quad (5.2.11)$$

Diese "Kegelbedingung" ($\vec{p}_{uv}^{(\text{var})}$ variiert um die Normale \vec{n} auf einem Kegel) ist eine Regularitätsforderung an den Variationsprozeß.

Bem.: HAGENS Flächenklasse stellt insofern eine Erweiterung der Flächenklasse NOWACKIs dar, als hier die Größen $E_{k,l}$ bzw. $G_{k,l}$ (aus der 1. Fundamentalform) nicht mehr segmentweise konstant gehalten werden.

Setzt man all die Bedingungen aus (5.2.11) in das Funktional (5.2.10) ein und wendet man das *Fundamental-Lemma der Variationsrechnung* an, so erhält man als notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums dieses Funktionals :

$$H * \left(5 * \frac{E^2 g^2 + G^2 e^2}{EG-F^2} - 4 * e * g + 2 * \tilde{f}^2 \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.2.12)$$

(Hierbei ist $\tilde{f}^2 := \alpha \langle \vec{p}_{uv}, \vec{n} \rangle + \beta \langle \vec{p}_{vu}, \vec{n} \rangle$.)

Löst man (5.2.12) nach der zu bestimmenden Größe \tilde{f} auf, so findet sich

$$\tilde{f} = \pm \sqrt{0.5 * \left(4eg - 5 \frac{E^2 g^2 + G^2 e^2}{EG-F^2} \right)} \quad (5.2.13)$$

Hagen bestimmt einen Twist nun ausschließlich aus dem "optimal" Vielfachen des zugehörigen Normalen-Vektors an einer Patch-Ecke :

$$\tilde{\vec{p}}_{uv} := +(-) \tilde{f} * \tilde{n} \quad (5.2.14)$$

Da in (5.2.13) ausschließlich berechenbare Größen der 1. und 2. Fundamentalform vorkommen, ist es möglich, bei Kenntnis ausreichend oft differenzierbarer Patch-Randkurven auch (5.2.14) auszuwerten und einen optimalen Twistvektor zu bestimmen.

5.2.3 Glättung segmentierter Gordon-Coons-Flächen nach HAGEN / SCHULZE

Das C^2 -biquintische Gordon-Coons-Patch stellt sich in Matrizen-Schreibweise so dar :

$$\vec{p}(u, v) = \begin{bmatrix} h_0(u) \\ h_1(u) \\ \bar{h}_0(u) \\ \bar{h}_1(u) \\ \bar{h}_0(u) \\ \bar{h}_1(u) \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} \vec{p}_{00} & \vec{p}_{01} & \vec{p}_v & \vec{p}_v & \vec{p}_{vv} & \vec{p}_{vv} \\ \vec{p}_{10} & \vec{p}_{11} & \vec{p}_v & \vec{p}_v & \vec{p}_{vv} & \vec{p}_{vv} \\ \vec{p}_u & \vec{p}_u & \vec{p}_{uv} & \vec{p}_{uv} & 0 & 0 \\ \vec{p}_u & \vec{p}_u & \vec{p}_{uv} & \vec{p}_{uv} & 0 & 0 \\ \vec{p}_{uu} & \vec{p}_{uu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{p}_{uu} & \vec{p}_{uu} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} h_0(v) \\ h_1(v) \\ \bar{h}_0(v) \\ \bar{h}_1(v) \\ \bar{h}_0(v) \\ \bar{h}_1(v) \end{bmatrix}$$

(5.2.15)

Hierbei sind h_0, \dots, \bar{h}_1 die 6 quintischen Hermite-Polynome, jeweils parametrisiert über $[0, 1]$. Da die partiellen Ableitungen vom Grad größer 2 keine geometrische Bedeutung haben, können die unteren rechten Elemente der mittleren Matrix 0 gesetzt werden. Die quintischen Hermite-Polynome sind gegeben durch

$$\begin{bmatrix} h_0(u) \\ h_1(u) \\ \bar{h}_0(u) \\ \bar{h}_1(u) \\ \bar{h}_0(u) \\ \bar{h}_1(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 & 15 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -15 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1.5 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^5 \end{bmatrix} \quad u \in [0, 1]$$

(analog für v !)

In der Darstellung (5.2.15) ist ein Patch ganz durch seine Eckpunkt-Information gegeben; sämtlich vorgegeben sind alle Matrix-Elemente mit Ausnahme der $\tilde{\vec{p}}_{uv} 1$. Diese Werte werden nach (5.2.13) als optimale Vielfache der Einheits-Normalen an den 4 Eckpunkten des Patches ermittelt.

5. 2. 4. Automatischer Glättungsalgorithmus für C² - stetige biquintische Gordon - Coons - Flächen

gegeben : (m+1) * (n+1) Punkte $\vec{p}_{i,j}$, i=0...m, j=0...n, des \mathbb{R}^3
gesucht : C² - stetige biquintische Gordon - Coons - Fläche mit minimaler Spannungsenergie (Summe Krümmung und Torsion)

Algorithmus :

- (i) Berechnung einer Parameter - Partition für u und v entsprechend den euklidischen Abständen der gegebenen Punkte $\Rightarrow \{u_0, \dots, u_m\}$ und $\{v_0, \dots, v_n\}$.
- (ii) Berechnung zweier Scharen von natürlichen kubischen interpolierenden Bezier-Splines, die die Punkte

$$\begin{aligned} \vec{p}_{0,j}, \vec{p}_{1,j}, \dots, \vec{p}_{m-1,j}, \vec{p}_{m,j} & ; j=0\dots n \text{ und} \\ \vec{p}_{i,0}, \vec{p}_{i,1}, \dots, \vec{p}_{i,n-1}, \vec{p}_{i,n} & ; i=0\dots m \text{ interpolieren.} \end{aligned}$$

\Rightarrow zwei Scharen von (zugehörigen) Bezierpunkten :

$$\begin{aligned} \vec{b}_{0,j}, \vec{b}_{1,j}, \dots, \vec{b}_{3m-1,j}, \vec{b}_{3m,j} & ; j=0\dots n \text{ und} \\ \vec{b}_{i,0}, \vec{b}_{i,1}, \dots, \vec{b}_{i,3n-1}, \vec{b}_{i,3n} & ; i=0\dots m \end{aligned}$$

- (iii) Berechnung der partiellen Ableitungen $\partial \vec{p}(u_i, v_j) / \partial u$, $\partial \vec{p}(u_i, v_j) / \partial u \partial u$, $\partial \vec{p}(u_i, v_j) / \partial v$ und $\partial \vec{p}(u_i, v_j) / \partial v \partial v$ - i=0...m, j=0...n - zu allen gegebenen Punkten $\vec{p}_{i,j}$. Diese Ableitungen werden gewonnen durch Differentiation der einzelnen kubischen Bezier-Segmente ; für ein solches kubisches Bezier-Segment (definiert über [a, b]) gilt :

$$\begin{aligned} \vec{b}'(t=a) &= \frac{3}{(b-a)} * (\vec{b}_1 - \vec{b}_0) \quad \text{und} \\ \vec{b}''(t=a) &= \frac{6}{(b-a)^2} * (\vec{b}_2 - 2\vec{b}_1 + \vec{b}_0) \end{aligned}$$

- (iv) Berechnung der Einheits-Normalen $\vec{n}_{i,j}$ - i=0...m, j=0...n - zu allen Gitterpunkten $\vec{p}_{i,j}$ durch Bildung der Kreuzprodukte $(\vec{p}_u^{i,j} \times \vec{p}_v^{i,j})$ und anschließender Normierung auf die Länge 1.
- (v) Bestimmung der Größen $E_{i,j}$, $F_{i,j}$, $G_{i,j}$, $e_{i,j}$ und $g_{i,j}$ der 1. bzw. 2. Fundamentalform regulärer Flächen zu allen Gitterpunkten $\vec{p}_{i,j}$ ($E = \langle \vec{p}_u, \vec{p}_u \rangle$, $F = \langle \vec{p}_u, \vec{p}_v \rangle$, $G = \langle \vec{p}_v, \vec{p}_v \rangle$, $e = \langle \vec{p}_{uu}, \vec{n} \rangle$ und $g = \langle \vec{p}_{vv}, \vec{n} \rangle$) .
- (vi) Bestimmung der optimalen Faktoren $\text{faktor}_{i,j}$ (nach HAGEN) , mit denen die Einheits - Normalen $\vec{n}_{i,j}$ zu multiplizieren sind , um die Twists $\vec{p}_{uv}^{i,j}$ zu erhalten :

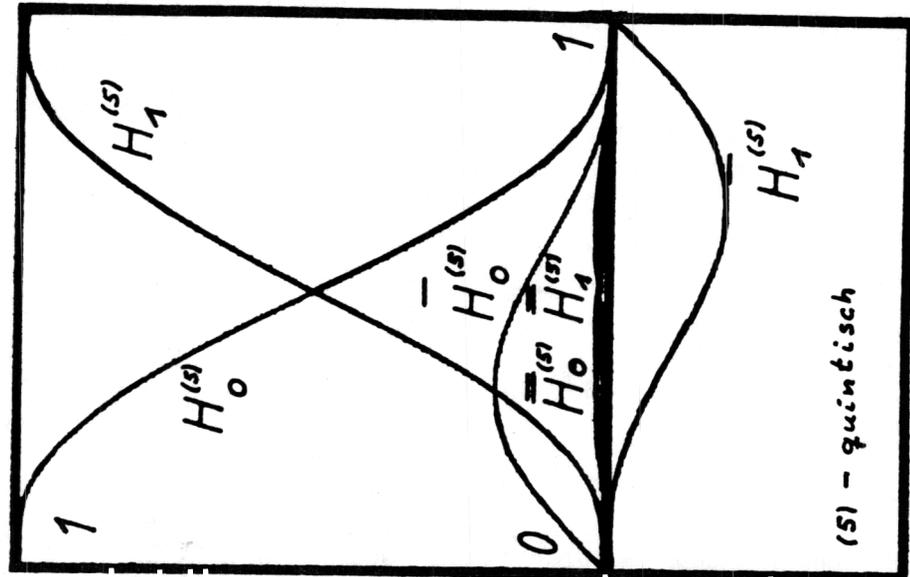
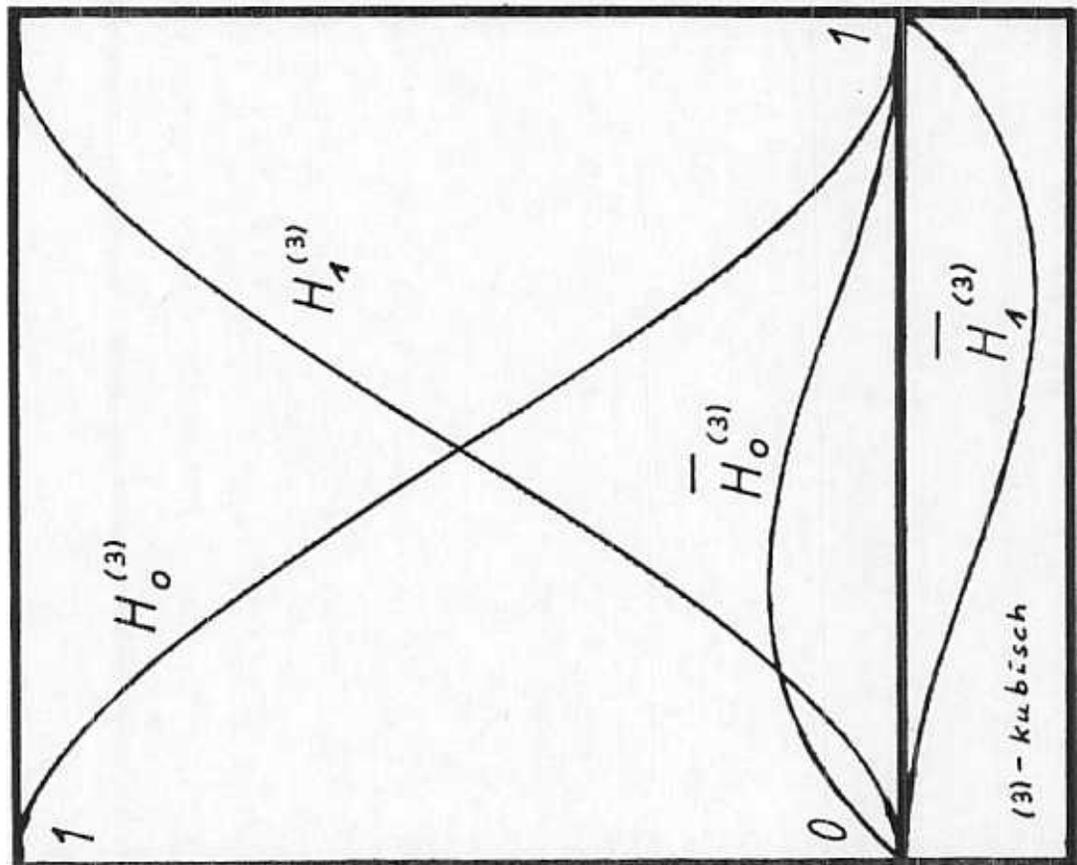
$$\text{faktor}_{i,j} := \sqrt{0.5 * \left(4 e_{i,j} g_{i,j} - 5 \frac{E_{i,j}^2 g_{i,j}^2 + G_{i,j}^2 e_{i,j}^2}{E_{i,j} G_{i,j} - F_{i,j}^2} \right)}$$

- (vii) Berechnung der optimalen Twists $\vec{p}_{uv}^{i,j}$ als Produkt $\text{faktor}_{i,j} * \vec{n}_{i,j}$ zu allen Gitterpunkten $\vec{p}_{i,j}$.
- (viii) Auswertung der jetzt eindeutig charakterisierten Gordon - Coons - Fläche mittels biquintischer Hermite - Interpolation nach (5.2.15)

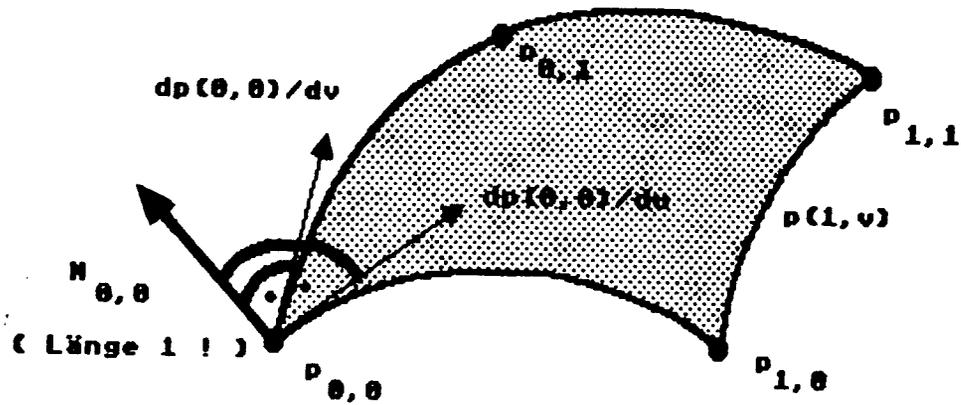
Bem. : Ein Programm, das den hier skizzierten Algorithmus realisiert , ist im Anhang dieser Arbeit angegeben .

5.3. Bilder zu Kapitel 5

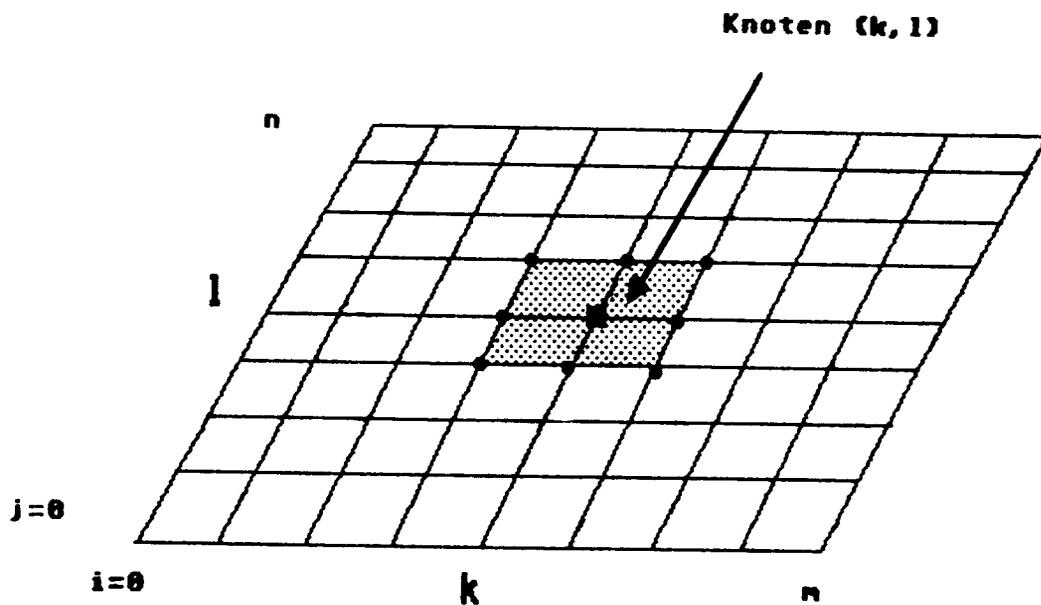
a) kubische bzw. quintische Hermite - Basispolynome



- b) - Prinzip der Twist-Bestimmung bei Hagen
 - Eingabe-Information zum Aufbau einer Zeile des sich nach Walter ergebenden LGS zur Twist-Bestimmung



$$\text{HAGEN : Twist}_{0,0} := x * N_{0,0}$$



Gleichung für den Knoten (k, l) nach WALTER :

9 Nachbar-Twists sind zu berücksichtigen !

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BÖHM, W. , GOSE, G. , KAHMANN, J.
"Methoden der Numerischen Mathematik",
Vieweg Braunschweig 1977
- BÖHM, W. , FARIN, G. , KAHMANN, J.
"A survey of curve and surface methods
in CAGD" , erschienen in "CAGD" 1984,
North-Holland
- BRUNET, P. "Increasing the smoothness of bicubic
spline surfaces", erschienen in "CAGD" 2
1985, North-Holland
- [4] CARMO, M.P. do : "Differentialgeometrie von Kurven und
Flächen", Vieweg Braunschweig 1983
- CLEGG, J.C. "Variationsrechnung", Teubner 1970
- FAUX, I.D. , PRATT, M.J. :
"Computational geometry for design and
manufacture", Ellis Horwood 1979
- ENGELN-MÜLLGES, G. , REUTTER, F.
"Numerische Mathematik für Ingenieure",
BI 1985
- HAGEN, H. "Geometric surface patches without twist
constraints", erschienen in "CAGD" 3, 1986
- HAGEN, H. "Generalized Gordon-Coons patches",
noch zu veröffentlichen
- [10] HAGEN, H. "Automatic smoothing with geometric
surface patches", noch zu veröffentlichen

- [11] HOSCHEK, J. "Detecting regions with undesirable curvature", erschienen in "CAGD" 1, 1984
- [12] HOSCHEK, J. : "Smoothing of curves and surfaces", erschienen in "CAGD" 2, 1985
- [13] LIPSCHUTZ, M.M. : "Differentialgeometrie", McGraw-Hill 1980
- [14] NOWACKI, H. , REESE, D. , RIEDGER, M. , LANG, R.
"Flächenhaftes Glätten und Verändern von Schiffsoberflächen", Forschungsbericht, August 1983
- [15] SCHELSKE, H.-J. : "Lokale Glättung segmentierter Bezierkurven und Bezierflächen", Dissertation 1983, TH Darmstadt
- [16] WALTER, H. : "Numerische Darstellung von Oberflächen unter Verwendung eines Optimalprinzips", Dissertation 1971, TU München

Erklärung

**Ich versichere, die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Benutzung
der angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben .**

Braunschweig , 31. Oktober 1987

Bernd Hanau.....